Сборник готовых задач на формулу Бернулли

Задача 1. Пусть проводится $n = 6$ независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна $p = 0{,}1$. Найти вероятность того, что в данной серии испытаний событие A появится $m = 3$ раза.

Решение: используем формулу Бернулли:
$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$

В данной задаче:
$n = 6$ – всего испытаний;
$m = 3$ – ожидаемое количество появлений события A шести испытаниях;
$p = 0{,}1$ – вероятность появления события A в каждом испытании;
$q = 1 - p = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$ – вероятность того, что событие A не появится в каждом испытании;
P_6^3 – вероятность того, что в 6 испытаниях событие A появится ровно 3 раза.

Таким образом, искомая вероятность:

$$P_6^3 = C_6^3 \cdot p^3 \cdot q^3 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} \cdot (0{,}1)^3 \cdot (0{,}9)^3 = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{6} \cdot 0{,}001 \cdot 0{,}729 = 0{,}01458$$

Ответ: $P_6^3 = 0{,}01458$

Задача 2. Стрелок делает 6 выстрелов по мишени. Вероятность попадания при одном выстреле $\frac{2}{3}$. Найти вероятность того, что он попал 4 раза.

Решение: используем формулу Бернулли:
$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$

В данном случае:
$n = 6$ – всего выстрелов;
$m = 4$ – искомое количество попаданий в шести испытаниях;
$p = \frac{2}{3}$ – вероятность попадания в мишень при каждом выстреле;
$q = 1 - p = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ – вероятность промаха в каждом выстреле;

Таким образом:

$$P_6^4 = C_6^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{6!}{4!\cdot 2!} \cdot \frac{16}{81} \cdot \frac{1}{9} = \frac{5\cdot 6}{2} \cdot \frac{16}{729} = \frac{80}{243}$$ – вероятность того, что при шести выстрелах будет ровно 4 попадания.

Ответ: $P_6^4 = \frac{80}{243} \approx 0{,}3292$

Задача 3. В результате обследования были выделены семьи, имеющие по 4 ребенка. Считая вероятности появления мальчика и девочки в семье равными, определить вероятности появления в ней:

а) одного мальчика;
б) двух мальчиков.

Решение: Используем формулу Бернулли: $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$

В данной задаче:
$n = 4$ – всего детей в семье;
m – количество мальчиков в семье.
$p = 0{,}5$ – вероятность рождения мальчика;
$q = 1 - p = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$ – вероятность рождения девочки;
P_4^m – вероятность того, что среди 4 детей будет ровно m мальчиков.

а) $P_4^1 = C_4^1 \cdot (0{,}5)^1 \cdot (0{,}5)^3 = 4 \cdot (0{,}5)^4 = 0{,}25$ – вероятность того, что среди 4 детей будет один мальчик.

б) $P_4^2 = C_4^2 \cdot (0{,}5)^2 \cdot (0{,}5)^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot (0{,}5)^2 \cdot (0{,}5)^2 = 6 \cdot (0{,}5)^4 = 0{,}375$ – вероятность того, что среди 4 детей будет два мальчика.

Ответ: а) 0,25; б) 0,375

Задача 4. Статистика аудиторских проверок компании утверждает, что вероятность обнаружения ошибки в каждом проверяемом документе равна 0,1. Какова вероятность, что из десяти проверяемых документов девять из них не будет содержать ошибки?

Решение: используем формулу Бернулли: $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$

В данном случае:
$n = 10$ – всего проверяемых документов;
$m = 9$ –количество документов, в которых нет ошибки;
$p = 0{,}9$ – вероятность того, что документ не содержит ошибки;
$q = 0{,}1$ – вероятность того, что ошибка есть.

Таким образом:
$P_{10}^9 = C_{10}^9 \cdot p^9 \cdot q^1 = 10 \cdot (0{,}9)^9 \cdot 0{,}1 \approx 0{,}3874$ – вероятность того, что из десяти проверяемых документов ровно девять не будут содержать ошибки.

Ответ: $\approx 0{,}3874$

Задача 5. По данным технического контроля 2% изготовленных станков нуждаются в дополнительной регулировке. Найти вероятность того, что из 6 изготовленных станков 4 нуждаются в дополнительной регулировке.

Решение: Используем формулу Бернулли: $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$

В данном случае:

$P_6^4 = C_6^4 p^4 q^2 = \frac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot(0{,}02)^4\cdot(0{,}98)^2 = \frac{5\cdot 6}{2}\cdot(0{,}02)^4\cdot(0{,}98)^2 \approx 0{,}000002$ – вероятность того, что из 6 изготовленных станков 4 нуждаются в дополнительной регулировке

Ответ: $\approx 0{,}000002$, данное событие практически невозможно.

Задача 6. Производится 5 выстрелов в мишень. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 3/4 . Найти вероятность того, что в мишени будет не менее трёх, но и не более четырёх пробоин. Найти наивероятнейшее число попаданий и соответствующую ему вероятность.

Решение: используем формулу Бернулли: $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$.

В данном случае:

$P_5^3 = C_5^3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\frac{3^3}{4^5} = \frac{4\cdot 5}{2}\cdot\frac{27}{1024} = \frac{270}{1024} \approx 0{,}2637$ – вероятность того, что при пяти выстрелах в мишень будет ровно 3 попадания.

$P_5^4 = C_5^4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^1 = 5\cdot\frac{3^4}{4^5} = 5\cdot\frac{81}{1024} = \frac{405}{1024} \approx 0{,}3955$ – вероятность того, что при пяти выстрелах в мишень будет ровно 4 попадания.

По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$P_5(3 \le m \le 4) = P_5^3 + P_5^4 = \frac{270}{1024} + \frac{405}{1024} = \frac{675}{1024} \approx 0{,}6592$ – вероятность того, что в мишени будет не менее трёх, но и не более четырёх пробоин.

Наивероятнейшее число попаданий m_0 удовлетворяет следующему неравенству:

$$np - q \le m_0 < np + p$$
$$5\cdot 0{,}75 - 0{,}25 \le m_0 < 5\cdot 0{,}75 + 0{,}75$$
$$3{,}5 \le m_0 < 4{,}5 \Rightarrow m_0 = 4$$

Соответствующая вероятность уже найдена: $P_5^4 = \frac{405}{1024} \approx 0{,}3955$

Ответ: $P_5(3 \le m \le 4) = \frac{675}{1024} \approx 0{,}6592$, $m_0 = 4$, $P_5^4 = \frac{405}{1024} \approx 0{,}3955$

Задача 7. В каждой из восьми урн имеется 10 белых и 5 черных шаров. Из каждой урны извлекли по одному шару. Что вероятнее: появление двух черных и шести белых или трех черных и пяти белых шаров?

Решение: Из условия находим: 10 + 5 = 15 шаров в каждой урне.

По классическому определению:
$p=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$, $q=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$ – вероятности извлечения черного и белого шара соответственно из каждой урны.

Используем формулу Бернулли:
$P_n^m=C_n^m p^m q^{n-m}$

$P_8^2=C_8^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^6=\frac{8!}{6!\cdot 2!}\cdot\frac{2^6}{3^8}=\frac{7\cdot 8}{2}\cdot\frac{64}{3^8}=\frac{1792}{3^8}\approx 0{,}2731$ – вероятность того, что будут извлечены 2 черных и 6 белых шаров.

$P_8^3=C_8^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{8!}{5!\cdot 3!}\cdot\frac{2^5}{3^8}=\frac{6\cdot 7\cdot 8}{6}\cdot\frac{32}{3^8}=\frac{1792}{3^8}\approx 0{,}2731$– вероятность того, что будут извлечены 3 черных и 5 белых шаров.

$P_8^2=P_8^3$

Ответ: данные события равновероятны

Задача 8. Вероятность поражения стрелком мишени равна 0,5. Найти вероятность того, что при 8 выстрелах мишень будет поражена от 5 до 7 раз.

Решение: Используем формулу Бернулли:
$P_n^m=C_n^m p^m q^{n-m}$

В данном случае:
$n=8$ – всего выстрелов
$p=0{,}5$ – вероятность поражения мишени при каждом выстреле;
$q=1-p=1-0{,}5=0{,}5$ – вероятность промаха при каждом выстреле.

По теореме сложения вероятностей несовместных событий:
$$P_8(5\le m\le 7)=P_8^5+P_8^6+P_8^7=C_8^5\cdot(0{,}5)^5\cdot(0{,}5)^3+C_8^6\cdot(0{,}5)^6\cdot(0{,}5)^2+C_8^7\cdot(0{,}5)^5\cdot(0{,}5)^3=$$
$$=\frac{6\cdot 7\cdot 8}{6}\cdot(0{,}5)^8+\frac{7\cdot 8}{2}\cdot(0{,}5)^8+8\cdot(0{,}5)^8=0{,}21875+0{,}109375+0{,}03125=0{,}359375$$
– вероятность того, что при 8 выстрелах мишень будет поражена от 5 до 7 раз.

Ответ: 0,359375

Задача 9. Для вычислительной лаборатории приобретено девять компьютеров, причем вероятность брака для одного компьютера равна 0,1. Какова вероятность, что придется заменить более двух компьютеров.

Решение: сначала найдем $P_9(m \le 2)$ – вероятность того, что придется заменить не более двух компьютеров. Используем формулу Бернулли:

$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$, в данной задаче:

$n = 9$ – всего компьютеров;

$m = \{0;1;2\}$ – возможное количество компьютеров, подлежащих замене;

$p = 0{,}1$ – вероятность брака;

$q = 1 - p = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$ – вероятность того, что компьютер качественный;

P_9^m – вероятность того, что среди 9 компьютеров бракованными окажутся ровно m компьютеров.

По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P_9(m \le 2) = P_9^0 + P_9^1 + P_9^2 = C_9^0 \cdot (0{,}1)^0 \cdot (0{,}9)^9 + C_9^1 \cdot (0{,}1)^1 \cdot (0{,}9)^8 + C_9^2 \cdot (0{,}1)^2 \cdot (0{,}9)^7 =$$

$$= (0{,}9)^9 + 9 \cdot 0{,}1 \cdot (0{,}9)^8 + \frac{9!}{7!2!} \cdot (0{,}1)^2 \cdot (0{,}9)^7 \approx 0{,}3874 + 0{,}3874 + 0{,}1722 \approx 0{,}947$$

–вероятность того, что придется заменить не более двух компьютеров.

Тогда: $P_9(m > 2) = 1 - P_9(m \le 2) \approx 1 - 0{,}947 = 0{,}053$ – вероятность того, что придется заменить более двух компьютеров.

Ответ: $\approx 0{,}053$

Задача 10. В магазине 6 покупателей. Каждый может совершить покупку с вероятностью 0,4. Найти вероятность того, что не более двух человек совершат покупку.

Решение: Рассмотрим событие:

A – покупку совершат не более двух человек из шести;

Событие A состоит в трех несовместных исходах: покупку никто не совершит или покупку совершит один человек, или покупку совершат два человека.

Для решения задачи используем формулу Бернулли:

$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$, в данной задаче:

$n = 6$ – всего человек в магазине;

$m = \{0;1;2\}$ – вероятное количество человек, которые совершат покупку;

$p = 0{,}4$ – вероятность того, что покупатель совершит покупку (для каждого человека);

$q = 1 - p = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$ – вероятность того, что покупатель не совершит покупки (для каждого человека).

По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P_6(m \le 2) = P_6^0 + P_6^1 + P_6^2 = C_6^0 \cdot (0{,}4)^0 \cdot (0{,}6)^6 + C_6^1 \cdot (0{,}4)^1 \cdot (0{,}6)^5 + C_6^2 \cdot (0{,}4)^2 \cdot (0{,}6)^4 =$$

$$(0{,}6)^6 + 6 \cdot 0{,}4 \cdot (0{,}6)^5 + \frac{5 \cdot 6}{2} \cdot (0{,}4)^2 \cdot (0{,}6)^4 = 0{,}046656 + 0{,}186624 + 0{,}31104 = 0{,}54432$$

Ответ: $P_6(m \le 2) = 0{,}54432$ – искомая вероятность.

Задача 11. Четыре покупателя приехали на оптовый склад. Вероятность того, что каждому из этих покупателей потребуется холодильник марки «Атлант», равна 0,4. Найти вероятность того, что холодильник потребуется:

а) не менее чем двум покупателям;
б) не более чем трем покупателям;
в) всем четырем покупателям.

Решение: Используем формулу Бернулли: $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$, в данной задаче:

$n = 4$ – всего покупателей на складе;
m – количество покупателей, которым потребовался холодильник марки «Атлант».
$p = 0,4$ – вероятность того, что холодильник «Атлант» потребуется покупателю (для каждого покупателя);
$q = 1 - p = 1 - 0,4 = 0,6$ – вероятность того, что он не потребуется;

а) По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P_4(m \geq 2) = P_4^2 + P_4^3 + P_4^4 = C_4^1 \cdot (0,5)^1 \cdot (0,5)^3 = C_4^2 \cdot (0,4)^2 \cdot (0,6)^2 + C_4^3 \cdot (0,4)^3 \cdot (0,6)^1 +$$
$$+ C_4^4 \cdot (0,4)^4 \cdot (0,6)^0 = 6 \cdot (0,4)^2 \cdot (0,6)^2 + 4 \cdot (0,4)^3 \cdot 0,6 + (0,4)^4 =$$
$= 0,3456 + 0,1536 + 0,0256 = 0,5248$ – вероятность того, что данный холодильник потребуется не менее чем двум покупателям

в) По формуле Бернулли: $P_4^4 = 0,0256$ – вероятность того, что данный холодильник потребуется все четырем покупателям (рассчитано в предыдущем пункте)

б) Тогда: $P_4(m \leq 3) = 1 - P_4^4 = 1 - 0,0256 = 0,9744$ – вероятность того, что данный холодильник потребуется не более чем трем покупателям.

Ответ: а) 0,5248; б) 0,9744; в) 0,0256

Задача 12. Вероятность попадания стрелка в мишень при 1-м выстреле равна $0,5$. Производится 5 выстрелов. Найти вероятность того, что стрелок промахнется не более двух раз.

Решение: используем формулу Бернулли: $P_n^x = C_n^x p^x q^{n-x}$, в данном случае:

$n = 5$ – всего выстрелов;
$x = \{0,1,2\}$ – вероятное количество промахов;
$p = 1 - 0,5 = 0,5$ – вероятность промаха;
$q = 0,5$ – вероятность попадания;
P_5^x – вероятность того, что из 5 выстрелов будет ровно x промахов

По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$p_5(x \leq 2) = P_5^0 + P_5^1 + P_5^2 = C_5^0 p^0 q^5 + C_5^1 p^1 q^4 + C_5^2 p^2 q^3 =$$
$$= (0,5)^5 + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot (0,5)^4 + \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot (0,5)^2 \cdot (0,5)^3 = 0,03125 + 0,15625 + 0,3125 = 0,5$$
– вероятность того, из 5 выстрелов будет не более 2 промахов.

Ответ: 0,5

Задача 13. Монету бросают 5 раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет: а) менее 2 раз; б) не менее 2 раз.

Решение: используем формулу Бернулли: $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$

В данной задаче:
$n = 5$ – всего бросков;
m – количество выпадений «герба»;
$p = 0{,}5$ – вероятность выпадения «герба»;
$q = 1 - p = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$ – вероятность выпадения «цифры»;
P_5^m – вероятность того, что при 5 бросках «герб» выпадет ровно m раз.

1) По теореме сложения вероятностей несовместных событий:
$P_5(m < 2) = P_5^0 + P_5^1 = C_5^0 p^0 q^5 + C_5^1 p^1 q^4 = 1 \cdot (0{,}5)^0 \cdot (0{,}5)^5 + 5 \cdot (0{,}5)^1 \cdot (0{,}5)^4 =$
$= 6 \cdot (0{,}5)^5 = 6 \cdot 0{,}03125 = 0{,}1875$ – вероятность того, что при 5 бросках герб выпадет менее 2 раз.

2) Вероятность противоположного события:
$P_5(m \geq 2) = 1 - P_5(m < 2) = 1 - 0{,}1875 = 0{,}8125$ – вероятность того, что при 5 бросках герб выпадет не менее двух раз.

Ответ: 1) 0,1875; 2) 0,8125

Задача 14. Частица пролетает последовательно мимо 5 счетчиков. Каждый счетчик независимо от остальных отмечает ее пролёт с вероятностью 0,8. Частица считается зарегистрированной, если она отмечена не менее чем 2 счетчиками. Найти вероятность зарегистрировать частицу.

Решение: Используем формулу Бернулли: $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$

В данном случае:
$n = 5$ – общее количество счетчиков;
m – вероятное количество счетчиков, зарегистрировавших частицу;
$p = 0{,}8$ – вероятность регистрации частицы для каждого счетчика;
$q = 1 - p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$ – вероятность того, что частица не будет зарегистрирована;
P_5^m – вероятность того, что из пяти счетчиков частицу зарегистрируют ровно m счетчиков.

По теореме сложения вероятностей несовместных событий:
$P(m < 2) = P_5^0 + P_5^1 = C_5^0 \cdot (0{,}8)^0 \cdot (0{,}2)^5 + C_5^1 \cdot (0{,}8)^1 \cdot (0{,}2)^4 =$
$= (0{,}2)^5 + 5 \cdot 0{,}8 \cdot (0{,}2)^4 = 0{,}00032 + 0{,}0064 = 0{,}00672$ – вероятность того, что частица будет отмечена менее чем двумя счетчиками (не зарегистрирована).

Найдём вероятность противоположного события:
$P(m \geq 2) = 1 - P(m < 2) = 1 - 0{,}00672 = 0{,}99328$ – вероятность того, что частица будет отмечена не менее чем двумя счетчиками (частица зарегистрирована).

Ответ: 0,99328

Задача 15. В телеателье имеется 7 телевизоров. Для каждого телевизора вероятность того, что в данный момент он включен, равна 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) четыре телевизора; б) хотя бы один телевизор; в) не менее трех телевизоров.

Решение: используем формулу Бернулли: $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$

В данной задаче:

$n = 7$ – всего телевизоров;

m – вероятное количество включенных телевизоров;

$p = 0{,}6$ – вероятность того, что телевизор включен;

$q = 1 - p = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$ – вероятность того, что телевизор выключен;

P_7^m – вероятность того, что из 7 телевизоров включены ровно m.

а) $P_7^4 = C_7^4 \cdot (0{,}6)^4 \cdot (0{,}4)^3 = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{6} \cdot (0{,}6)^4 \cdot (0{,}4)^3 = 0{,}290304$ – вероятность того, что в данный момент включены четыре телевизора из семи.

б) $P_7^0 = C_7^0 \cdot (0{,}6)^0 \cdot (0{,}4)^7 = (0{,}4)^7 = 0{,}0016384$ – вероятность того, что в данный момент все телевизоры выключены.

Тогда вероятность противоположного события:

$P_7(m \geq 1) = 1 - P_7^0 = 1 - 0{,}0016384 = 0{,}9983616$ – вероятность того, что в данный момент включен хотя бы один телевизор.

в) По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$P_7(m < 3) = P_7^0 + P_7^1 + P_7^2 = 0{,}0016384 + C_7^1 \cdot (0{,}6)^1 \cdot (0{,}4)^6 + C_7^2 \cdot (0{,}6)^2 \cdot (0{,}4)^5 =$

$= 0{,}0016384 + 0{,}0172032 + 0{,}0774144 = 0{,}096256$ – вероятность того, что в данный момент включено менее трех телевизоров из семи.

Вероятность противоположного события:

$P_7(m \geq 3) = 1 - P_7(m < 3) = 1 - 0{,}096256 = 0{,}903744$ – вероятность того, что в данный момент включено не менее трех телевизоров из семи.

Ответ: а) 0,290304; б) 0,9983616; в) 0,903744