ИДЗ-1.1

1.11. Для данного определителя Δ найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{32}, a_{34}. Вычислить определитель Δ: а) разложив его по элементам i-й строки; б) разложив по элементам j-го столбца; в) получив предварительно нули в i-й строке.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{vmatrix}$$

Решение: Вычислим миноры и соответствующие алгебраические дополнения.

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 9 & 4 \end{vmatrix} = -7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7 \cdot (12-6) - 9 \cdot (10+3) = -42 - 117 = -159$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -1 \cdot (-159) = 159$$

$$M_{34} = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 9 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 9 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-6-6) + 9 \cdot (10+9) = -84 + 171 = 87$$

$$A_{34} = (-1)^{3+4} \cdot M_{34} = -1 \cdot 87 = -87$$

а) Вычислим определитель, разложив его по элементам 3-й строки;

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 7 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 9 & 4 \end{vmatrix} - M_{32} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} + 6 \cdot M_{34} =$$

$$= 2 \cdot \left(-7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right) + 159 + 4 \cdot \left(5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right) + 6 \cdot 87 =$$

$$= 2 \cdot \left(-7 \cdot (8+4) - 9 \cdot (-6+2) \right) + 159 + 4 \cdot \left(5 \cdot (8+4) - 3 \cdot (-12-2) + 3 \cdot (-6+2) \right) + 522 =$$

$$= 2 \cdot \left(-84 + 36 \right) + 4 \cdot \left(60 + 42 - 12 \right) + 681 = -96 + 360 + 681 = 945$$

б) Вычислим определитель, разложив его по элементам 4-го столбца;

$$M_{14} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot (9+8) - 2 \cdot (18-12) = 51 - 12 = 39$$

$$M_{24} = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 9 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot (9+8) + 3 \cdot (18-12) + 7 \cdot (-4-3) = 85 + 18 - 49 = 54$$

$$M_{44} = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \cdot (3-4) + 4 \cdot (10+9) = -7 + 76 = 69$$

Таким образом:

$$\Delta=\begin{vmatrix}5&-3&7&-1\\3&2&0&2\\2&1&4&-6\\3&-2&9&4\end{vmatrix}=-(-1)\cdot M_{14}+2\cdot M_{24}-(-6)\cdot M_{34}+4\cdot M_{44}=$$

$$=39+2\cdot 54+6\cdot 87+4\cdot 69=39+108+522+276=945$$

в) Вычислим определитель, получив предварительно нули в 3-й строке.

$$\Delta=\begin{vmatrix}5&-3&7&-1\\3&2&0&2\\2&1&4&-6\\3&-2&9&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}11&-3&19&-19\\-1&2&-8&14\\0&1&0&0\\7&-2&17&-8\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}11&19&-19\\-1&-8&14\\7&17&-8\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0&-69&135\\-1&-8&14\\0&-39&90\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}0&69&135\\-1&8&14\\0&39&90\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}69&135\\39&90\end{vmatrix}=6210-5265=945$$

2.11. Даны две матрицы A и B. Найти: а) AB; б) BA; в) A^{-1}; г) AA^{-1}; д) $A^{-1}A$.

$$A=\begin{pmatrix}6&9&4\\-1&-1&1\\10&1&7\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1&1\\3&4&3\\0&5&2\end{pmatrix}$$

Решение:

а)

$$AB=\begin{pmatrix}6&9&4\\-1&-1&1\\10&1&7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\3&4&3\\0&5&2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}6\cdot1+9\cdot3+4\cdot0&6\cdot1+9\cdot4+4\cdot5&6\cdot1+9\cdot3+4\cdot2\\-1\cdot1-1\cdot3+1\cdot0&-1\cdot1-1\cdot4+1\cdot5&-1\cdot1-1\cdot3+1\cdot2\\10\cdot1+1\cdot3+7\cdot0&10\cdot1+1\cdot4+7\cdot5&10\cdot1+1\cdot3+7\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}33&62&41\\-4&0&-2\\12&49&27\end{pmatrix}$$

б)

$$BA=\begin{pmatrix}1&1&1\\3&4&3\\0&5&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6&9&4\\-1&-1&1\\10&1&7\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot6+1\cdot(-1)+1\cdot10&1\cdot9+1\cdot(-1)+1\cdot1&1\cdot4+1\cdot1+1\cdot7\\3\cdot6+4\cdot(-1)+3\cdot10&3\cdot9+4\cdot(-1)+3\cdot1&3\cdot4+4\cdot1+3\cdot7\\0\cdot6+5\cdot(-1)+2\cdot10&0\cdot9+5\cdot(-1)+2\cdot1&0\cdot4+5\cdot1+2\cdot7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&9&12\\44&26&37\\15&-3&19\end{pmatrix}$$

в) Обратную матрицу найдем по формуле:

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A_*^T$, где A_*^T – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A.

$$|A|=\begin{vmatrix}6&9&4\\-1&-1&1\\10&1&7\end{vmatrix}=6\cdot\begin{vmatrix}-1&1\\1&7\end{vmatrix}-9\cdot\begin{vmatrix}-1&1\\10&7\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix}-1&-1\\10&1\end{vmatrix}=$$

$$=6\cdot(-7-1)-9\cdot(-7-10)+4\cdot(-1+10)=-48+153+36=141$$

$$M=\begin{pmatrix}-8&-17&9\\59&2&-84\\13&10&3\end{pmatrix}$$ –матрица миноров соответствующих элементов матрицы A.

$$A_*=\begin{pmatrix}-8&17&9\\-59&2&84\\13&-10&3\end{pmatrix}$$ – матрица алгебраических дополнений.

$$A_*^T=\begin{pmatrix}-8&-59&13\\17&2&-10\\9&84&3\end{pmatrix}$$ – транспонированная матрица алгебраических дополнений.

Таким образом:

$$A^{-1}=\frac{1}{141}\cdot\begin{pmatrix}-8&-59&13\\17&2&-10\\9&84&3\end{pmatrix}$$

г)

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}6&9&4\\-1&-1&1\\10&1&7\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{141}\cdot\begin{pmatrix}-8&-59&13\\17&2&-10\\9&84&3\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{141}\cdot\begin{pmatrix}6\cdot(-8)+9\cdot17+4\cdot9&6\cdot(-59)+9\cdot2+4\cdot84&6\cdot13+9\cdot(-10)+4\cdot3\\-1\cdot(-8)-1\cdot17+1\cdot9&-1\cdot(-59)-1\cdot2+1\cdot84&-1\cdot13-1\cdot(-10)+1\cdot3\\10\cdot(-8)+1\cdot17+7\cdot9&10\cdot(-59)+1\cdot2+7\cdot84&10\cdot13+1\cdot(-10)+7\cdot3\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{141}\cdot\begin{pmatrix}141&0&0\\0&141&0\\0&0&141\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$$

д)

$$A^{-1}A=\frac{1}{141}\cdot\begin{pmatrix}-8&-59&13\\17&2&-10\\9&84&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6&9&4\\-1&-1&1\\10&1&7\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{141}\cdot\begin{pmatrix}-8\cdot6-59\cdot(-1)+13\cdot10&-8\cdot9-59\cdot(-1)+13\cdot1&-8\cdot4-59\cdot1+13\cdot7\\17\cdot6+2\cdot(-1)-10\cdot10&17\cdot9+2\cdot(-1)-10\cdot1&17\cdot4+2\cdot1-10\cdot7\\9\cdot6+84\cdot(-1)+3\cdot10&9\cdot9+84\cdot(-1)+3\cdot1&9\cdot4+84\cdot1+3\cdot7\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{141}\cdot\begin{pmatrix}141&0&0\\0&141&0\\0&0&141\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$$

ИДЗ-1.2

1.11. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Решение: Проверим совместность системы. Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 21 \\ 3 & 4 & -2 & 9 \\ 2 & -1 & -1 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 11 \\ 3 & 4 & -2 & 9 \\ 2 & -1 & -1 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 11 \\ 0 & 7 & -17 & -24 \\ 0 & 1 & -11 & -12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 11 \\ 0 & 1 & -11 & -12 \\ 0 & 7 & -17 & -24 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 11 \\ 0 & 1 & -11 & -12 \\ 0 & 0 & 60 & 60 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 11 \\ 0 & 1 & -11 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = (A|b)$$

Максимальный порядок ненулевого минора матрицы системы равен трём, $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, значит ранг $\text{Ранг}(A) = 3$.

По этой же причине $\text{Ранг}(A|b) = 3$

$\text{Ранг}(A) = \text{Ранг}(A|b)$, значит, по теореме Кронекера-Капелли система совместна.

а) Решим систему по формулам Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$= 3 \cdot (-4-2) + 2 \cdot (-3+4) + 4 \cdot (-3-8) = -18 + 2 - 44 = -60 \neq 0$, значит, система имеет единственное решение.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 21 & -2 & 4 \\ 9 & 4 & -2 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 21 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 21 \cdot (-4-2) + 2 \cdot (-9+20) + 4 \cdot (-9-40) = -126 + 22 - 196 = -300$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-300}{-60} = 5$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 21 & 4 \\ 3 & 9 & -2 \\ 2 & 10 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} - 21 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-9+20) - 21 \cdot (-3+4) + 4 \cdot (30-18) = 33 - 21 + 48 = 60$$

$$x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{60}{-60}=-1$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}3&-2&21\\3&4&9\\2&-1&10\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}4&9\\-1&10\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix}-2&21\\-1&10\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}-2&21\\4&9\end{vmatrix}=$$
$$=3\cdot(40+9)-3\cdot(-20+21)+2\cdot(-18-84)=147-3-284=-60$$

$$x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-60}{-60}=1$$

Ответ: $x_1=5, x_2=-1, x_3=1$.

б) Запишем систему в матричной форме:

$AX=B$, где $A=\begin{pmatrix}3&-2&4\\3&4&-2\\2&-1&-1\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}21\\9\\10\end{pmatrix}$

Для разрешения уравнения относительно X умножим обе его части на A^{-1} слева:

$A^{-1}AX=A^{-1}B$

$EX=A^{-1}B$

$X=A^{-1}B$

Обратную матрицу найдем по формуле:

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A_*^T$, где A_*^T – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A.

$|A|=\Delta=-60$

$M=\begin{pmatrix}-6&1&-11\\6&-11&1\\-12&-18&18\end{pmatrix}$ –матрица миноров соответствующих элементов матрицы A.

$A_*=\begin{pmatrix}-6&-1&-11\\-6&-11&-1\\-12&18&18\end{pmatrix}$ – матрица алгебраических дополнений.

$A_*^T=\begin{pmatrix}-6&-6&-12\\-1&-11&18\\-11&-1&18\end{pmatrix}$ – транспонированная матрица алгебраических дополнений.

Таким образом:

$$A^{-1}=\frac{1}{-60}\begin{pmatrix}-6&-6&-12\\-1&-11&18\\-11&-1&18\end{pmatrix}=\frac{1}{60}\begin{pmatrix}6&6&12\\1&11&-18\\11&1&-18\end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 12 \\ 1 & 11 & -18 \\ 11 & 1 & -18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 6\cdot 21 + 6\cdot 9 + 12\cdot 10 \\ 1\cdot 21 + 11\cdot 9 - 18\cdot 10 \\ 11\cdot 21 + 1\cdot 9 - 18\cdot 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 300 \\ -60 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $x_1 = 5, x_2 = -1, x_3 = 1$

б) Решим систему методом Гаусса. Система уже приведена к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 11 \\ 0 & 1 & -11 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Обратный ход: $x_3 = 1$,

$x_2 - 11x_3 = -12 \Rightarrow x_2 - 11 = -12 \Rightarrow x_2 = -1$

$x_1 - x_2 + 5x_3 = 11 \Rightarrow x_1 + 1 + 5 = 11 \Rightarrow x_1 = 5$

Ответ: $x_1 = 5, x_2 = -1, x_3 = 1$.

2.11. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}$$

Решение: Проверим совместность системы. Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -2 & -1 & 2 \\ 6 & -4 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 6 & -4 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -16 & -29 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) = (A|b)$$

Максимальный порядок ненулевого минора матрицы системы равен двум, $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -16 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$, значит ранг $\text{Ранг}(A) = 2$.

Максимальный порядок ненулевого минора расширенной матрицы системы равен трем, $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -16 & 9 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot(-16)\cdot 6 = -96 \neq 0$, значит ранг $\text{Ранг}(A|b) = 3$.

$\text{Ранг}(A) \neq \text{Ранг}(A|b)$, значит, по теореме Кронекера-Капелли система несовместна.

Ответ: Решений нет

3.11. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Решение: Запишем матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -10 & -10 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

x_1, x_2 – базисные переменные, x_3 – свободная переменная.

Выразим базисные переменные через свободную:

$x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_3$

$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \Rightarrow x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_3$

Ответ: Общее решение: $(-x_3; -x_3; x_3)$

4.11. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Решение: Запишем матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 2 & 3 & -5 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 0 & 13 & -17 \\ 0 & 26 & -34 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 0 & 13 & -17 \end{pmatrix}$$

x_1, x_2 – базисные переменные, x_3 – свободная переменная.

Выразим базисные переменные через свободную:

$13x_2 - 17x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{17}{13}x_3$

$x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 0 \Rightarrow x_1 - 5 \cdot \frac{17}{13}x_3 + 6x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{7}{13}x_3$

Ответ: Общее решение: $\left(\frac{7}{13}x_3; \frac{17}{13}x_3; x_3\right)$

ИДЗ-2.1

1.11. Даны векторы $\bar{a}=-2\bar{m}+3\bar{n}$ и $\bar{b}=3\bar{m}-6\bar{n}$, где $|\bar{m}|=6$, $|\bar{n}|=3$, $\angle(\bar{m};\bar{n})=\dfrac{5\pi}{3}$

Найти: а) $\left(3\bar{a}-\dfrac{1}{3}\bar{b}\right)\cdot(\bar{a}+2\bar{b})$; б) $Пр_{\bar{b}}(\bar{a}+2\bar{b})$; в) $\cos\angle(\bar{a};2\bar{b})$.

Решение:

а) Найдем $\left(3\bar{a}-\dfrac{1}{3}\bar{b}\right)\cdot(\bar{a}+2\bar{b})$.

$$\left(3\bar{a}-\frac{1}{3}\bar{b}\right)=3\cdot(-2\bar{m}+3\bar{n})-\frac{1}{3}\cdot(3\bar{m}-6\bar{n})=-6\bar{m}+9\bar{n}-\bar{m}+2\bar{n}=-7\bar{m}+11\bar{n}$$

$$(\bar{a}+2\bar{b})=-2\bar{m}+3\bar{n}+2\cdot(3\bar{m}-6\bar{n})=-2\bar{m}+3\bar{n}+6\bar{m}-12\bar{n}=4\bar{m}-9\bar{n}$$

$$\left(3\bar{a}-\frac{1}{3}\bar{b}\right)\cdot(\bar{a}+2\bar{b})=(-7\bar{m}+11\bar{n})\cdot(4\bar{m}-9\bar{n})=-28\bar{m}^2+44\bar{n}\bar{m}+63\bar{m}\bar{n}-99\bar{n}^2=$$

$$=-28\cdot|\bar{m}|^2+44\bar{m}\bar{n}+63\bar{m}\bar{n}-99\cdot|\bar{n}|^2=-28\cdot6^2+107\bar{m}\bar{n}-99\cdot3^2=$$

$$=-1008+107\cdot|\bar{m}|\cdot|\bar{n}|\cdot\cos\angle(\bar{m};\bar{n})-891=-1899+107\cdot6\cdot3\cdot\cos\frac{5\pi}{3}=$$

$$=-1899+107\cdot6\cdot3\cdot\frac{1}{2}=-1899+963=-936$$

б) $Пр_{\bar{b}}(\bar{a}+2\bar{b})=\dfrac{(\bar{a}+2\bar{b})\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}$

$$(\bar{a}+2\bar{b})\cdot\bar{b}=(4\bar{m}-9\bar{n})\cdot(3\bar{m}-6\bar{n})=12\bar{m}^2-27\bar{n}\bar{m}-24\bar{m}\bar{n}+54\bar{n}^2=$$

$$=12\cdot6^2-51\cdot6\cdot3\cdot\frac{1}{2}+54\cdot3^2=432-459+486=459$$

$$|\bar{b}|=|(3\bar{m}-6\bar{n})|=3|(\bar{m}-2\bar{n})|=3\cdot\sqrt{(\bar{m}-2\bar{n})^2}=3\cdot\sqrt{(\bar{m}-2\bar{n})^2}=$$

$$=3\cdot\sqrt{|\bar{m}|^2-4\bar{m}\bar{n}+4\cdot|\bar{n}|^2}=3\cdot\sqrt{6^2-4\cdot6\cdot3\cdot\frac{1}{2}+4\cdot3^2}=3\cdot\sqrt{36-36+36}=3\cdot6=18$$

Таким образом:

$$Пр_{\bar{b}}(\bar{a}+2\bar{b})=\frac{459}{18}=25{,}5$$

в)

$$\cos\angle(\bar{a};2\bar{b})=\frac{\bar{a}\cdot2\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|2\bar{b}|}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{(-2\bar{m}+3\bar{n})\cdot(3\bar{m}-6\bar{n})}{\sqrt{(-2\bar{m}+3\bar{n})^2}\cdot18}=$$

$$=\frac{3}{18}\cdot\frac{(-2\bar{m}+3\bar{n})\cdot(\bar{m}-2\bar{n})}{\sqrt{4\cdot|\bar{m}|^2-12\bar{m}\bar{n}+9\cdot|\bar{n}|^2}}=\frac{1}{6}\cdot\frac{-2\bar{m}^2+3\bar{n}\bar{m}+4\bar{m}\bar{n}-6\bar{n}^2}{\sqrt{4\cdot36-12\cdot9+9\cdot9}}=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{-2\cdot36+7\cdot9-6\cdot9}{\sqrt{4\cdot36-12\cdot9+9\cdot9}}=\frac{1}{6}\cdot\frac{-72+63-54}{\sqrt{144-108+81}}=\frac{1}{6}\cdot\frac{-63}{\sqrt{117}}=-\frac{21}{2\sqrt{117}}=-\frac{7}{2\sqrt{13}}\approx-0{,}97$$

2.11. По координатам точек $A(-2;-3;-4), B(2;-4;0), C(1;4;5)$ для указанных векторов найти: а) $|\overline{a}| = |4\overline{AC} - 8\overline{BC}|$; б) $\overline{a}\cdot\overline{b}$, $\overline{b} = \overline{c} = \overline{AB}$; в) $Пр_{\overline{d}}\overline{c}$, $\overline{d} = \overline{BC}$; г) координаты точки M, делящей отрезок $l = AB$ в отношении 4 : 2.

Решение:

а) Найдем векторы $\overline{AC}$, $\overline{BC}$:

$\overline{AC}(1-(-2);4-(-3);5-(-4)) = \overline{AC}(3;7;9)$

$\overline{BC}(1-2;4-(-4);5-0) = \overline{BC}(-1;8;5)$

$\overline{a} = 4\overline{AC} - 8\overline{BC} = 4(\overline{AC} - 2\overline{BC}) = 4((3;7;9) - 2(-1;8;5)) = 4((3;7;9) - (-2;16;10)) =$
$= 4(5;-9;-1)$

$$|\overline{a}| = 4\cdot\sqrt{5^2 + (-9)^2 + (-1)^2} = 4\cdot\sqrt{25+81+1} = 4\cdot\sqrt{107} = \sqrt{1712}$$

б) Вычислим $\overline{a}\cdot\overline{b}$.

$\overline{b} = \overline{AB}(2-(-2);-4-(-3);0-(-4)) = \overline{AB}(4;-1;4)$

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = 4(5\cdot 4 - 9\cdot(-1) - 1\cdot 4) = 4\cdot(20+9-4) = 4\cdot 25 = 100$$

в) $$Пр_{\overline{d}}\overline{c} = Пр_{\overline{BC}}\overline{AB} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{|\overline{BC}|} = \frac{4\cdot(-1) - 1\cdot 8 + 4\cdot 5}{\sqrt{(-1)^2 + 8^2 + 5^2}} = \frac{-4-8+20}{\sqrt{1+64+25}} = \frac{8}{\sqrt{90}} = \frac{8}{3\sqrt{10}}$$

г) Найдем координаты точки M, делящей отрезок $l = AB$ в отношении 4 : 2.
Используем формулы деления отрезка в данном отношении:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$$

$A(-2;-3;-4), B(2;-4;0)$, в данном случае $\lambda = \frac{4}{2} = 2$

$$x = \frac{-2+2\cdot 2}{1+2} = \frac{2}{3},\ y = \frac{-3+2\cdot(-4)}{1+2} = -\frac{11}{3},\ z = \frac{-4+2\cdot 0}{1+2} = -\frac{4}{3}$$

$$M\left(\frac{2}{3};-\frac{11}{3};-\frac{4}{3}\right)$$

3.11. Доказать, что векторы $\overline{a}(5;3;1), \overline{b}(-1;2;-3), \overline{c}(3;-4;2)$ образуют базис и найти координаты вектора $\overline{d}(-9;34;-20)$ в этом базисе.

Решение: Вычислим определитель, составленный из координат векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$= 5\cdot(4-12) + (6+4) + 3\cdot(-9-2) = -40 + 10 - 33 = -63 \neq 0$, значит, векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ линейно независимы и образуют базис.

Представим вектор $\bar{d}$ в виде линейной комбинации базисных векторов: $\bar{d} = x_1\bar{a} + x_2\bar{b} + x_3\bar{c}$, или покоординатно:

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 3x_3 = -9 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 34 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -20 \end{cases}$$

Систему решим по формулам Крамера:

$\Delta = -63 \neq 0$, значит, система имеет единственное решение (разложение вектора по базису – единственно).

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -9 & -1 & 3 \\ 34 & 2 & -4 \\ -20 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -9 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 34 & -4 \\ -20 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 34 & 2 \\ -20 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -9 \cdot (4-12) + (68-80) + 3 \cdot (-102+40) = 72 - 12 - 186 = -126$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-126}{-63} = 2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & -9 & 3 \\ 3 & 34 & -4 \\ 1 & -20 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 34 & -4 \\ -20 & 2 \end{vmatrix} + 9 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 34 \\ 1 & -20 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot (68-80) + 9 \cdot (6+4) + 3 \cdot (-60-34) = -60 + 90 - 282 = -252$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-252}{-63} = 4$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -9 \\ 3 & 2 & 34 \\ 1 & -3 & -20 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 34 \\ -3 & -20 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 34 \\ 1 & -20 \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot (-40+102) + (-60-34) - 9 \cdot (-9-2) = 310 - 94 + 99 = 315$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{315}{-63} = -5$$

Ответ: Векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют базис, $\bar{d} = 2\bar{a} + 4\bar{b} - 5\bar{c}$.

ИДЗ-2.2

1.11. Даны векторы $\bar{a} = 5\bar{i} - 3\bar{j} + 4\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} - 4\bar{j} - 2\bar{k}$, $\bar{c} = 3\bar{i} + 5\bar{j} - 7\bar{k}$. Найти: а) $\bar{a}\cdot(-4\bar{b})\cdot 2\bar{c}$; б) $\left|\left[-2\bar{b}\times 4\bar{c}\right]\right|$; в) $(-3\bar{a})\cdot(6\bar{c})$; г) Проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\bar{b}$, $\bar{c}$; д) проверить, будут ли компланарны три вектора $\bar{a}$, $-2\bar{b}$, $6\bar{c}$.

Решение:

а)

$$\bar{a}\cdot(-4\bar{b})\cdot 2\bar{c} = -8(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}) = -8\cdot\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ -3 & -4 & 5 \\ 4 & -2 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= -8\cdot\left(5\cdot\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= -8\cdot(5\cdot(28+10) - 2\cdot(21-20) + 3\cdot(6+16)) = -8\cdot(190 - 2 + 66) = -8\cdot 254 = -2032$$

б) Вычислим модуль векторного произведения $\left|\left[-2\bar{b}\times 4\bar{c}\right]\right|$.

Сначала найдем

$$\left[\bar{b}\times\bar{c}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -4 & -2 \\ 3 & 5 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 5 & -7 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\bar{k} =$$

$$= (28+10)\bar{i} - (-14+6)\bar{j} + (10+12)\bar{k} = 38\bar{i} + 8\bar{j} + 22\bar{k}$$

$$\left|\left[\bar{b}\times\bar{c}\right]\right| = \sqrt{38^2 + 8^2 + 22^2} = \sqrt{1444 + 64 + 484} = \sqrt{1992}$$

$$\left|\left[-2\bar{b}\times 4\bar{c}\right]\right| = 8\cdot\left|\left[\bar{b}\times\bar{c}\right]\right| = 8\sqrt{1992} = \sqrt{127488}$$

в) $(-3\bar{a})\cdot(6\bar{c}) = -18\cdot(\bar{a}\cdot\bar{c}) = -18\cdot(5\cdot 3 - 3\cdot 5 + 4\cdot(-7)) = -18\cdot(-28) = 504$

г) Проверим, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\bar{b}$, $\bar{c}$

$\bar{b}\cdot\bar{c} = 2\cdot 3 - 4\cdot 5 - 2\cdot(-7) = 6 - 20 + 14 = 0$, значит $\bar{b}\perp\bar{c}$

д) Векторы $\bar{a}$, $-2\bar{b}$, $6\bar{c}$ не компланарны так как $(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}) \neq 0$

2.11. Вершины пирамиды находятся в точках $A(3;-5;-2), B(-4;2;3), C(1;5;7)$, $D(-2;-4;5)$. Вычислить: а) площадь грани ACD; б) площадь сечения, проходящего через середину ребра $l = BD$ и вершины A, C; в) Объем пирамиды $ABCD$.

Решение:

а) Вычислим площадь грани ACD.

$\overline{AC}(1-3;5-(-5);7-(-2)) = \overline{AC}(-2;10;9)$

$\overline{AD}(-2-3;-4-(-5);5-(-2)) = \overline{AD}(-5;1;7)$

Найдем векторное произведение:

$$\overline{N}=\left[\overline{AC}\times\overline{AD}\right]=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ -2 & 10 & 9\\ -5 & 1 & 7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}10 & 9\\ 1 & 7\end{vmatrix}\overline{i}-\begin{vmatrix}-2 & 9\\ -5 & 7\end{vmatrix}\overline{j}+\begin{vmatrix}-2 & 10\\ -5 & 1\end{vmatrix}\overline{k}=$$

$$=(70-9)\overline{i}-(-14+45)\overline{j}+(-2+50)\overline{k}=61\overline{i}-31\overline{j}+48\overline{k}$$

$$\left|\overline{N}\right|=\sqrt{61^2+(-31)^2+48^2}=\sqrt{3721+961+2304}=\sqrt{6986}$$

$$S_{ACD}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{N}\right|=\frac{\sqrt{6986}}{2}\ \text{ед.}^2$$

б) Вычислим площадь сечения, проходящего через середину ребра $l=BD$ и вершины A,C.

Найдем точку $M(x;y;z)$ – середину отрезка BD. Используем формулы координат середины отрезка: $B(-4;2;3)$, $D(-2;-4;5)$:

$$x=\frac{-4-2}{2}=-3,\ y=\frac{2-4}{2}=-1,\ z=\frac{3+5}{2}=4$$

$M(-3;-1;4)$

$\overline{MA}(3-(-3);-5-(-1);-2-4)=\overline{MA}(6;-4;-6)$

$\overline{MC}(1-(-3);5-(-1);7-4)=\overline{MC}(4;6;3)$

Найдем векторное произведение:

$$\overline{N}=\left[\overline{MA}\times\overline{MC}\right]=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 6 & -4 & -6\\ 4 & 6 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4 & -6\\ 6 & 3\end{vmatrix}\overline{i}-\begin{vmatrix}6 & -6\\ 4 & 3\end{vmatrix}\overline{j}+\begin{vmatrix}6 & -4\\ 4 & 6\end{vmatrix}\overline{k}=$$

$$=(-12+36)\overline{i}-(18+24)\overline{j}+(36+16)\overline{k}=24\overline{i}-42\overline{j}+52\overline{k}$$

$$\left|\overline{N}\right|=\sqrt{24^2+(-42)^2+52^2}=\sqrt{576+1764+2704}=\sqrt{5044}=2\sqrt{1261}$$

$$S_{MAC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{N}\right|=\frac{2\sqrt{1261}}{2}=\sqrt{1261}\ \text{ед.}^2$$

в) Вычислим объем пирамиды.

$\overline{AB}(-4-3;2-(-5);3-(-2))=\overline{AB}(-7;7;5)$

$$p=\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix}-7 & 7 & 5\\ -2 & 10 & 9\\ -5 & 1 & 7\end{vmatrix}=-7\cdot\begin{vmatrix}10 & 9\\ 1 & 7\end{vmatrix}-7\cdot\begin{vmatrix}-2 & 9\\ -5 & 7\end{vmatrix}+5\cdot\begin{vmatrix}-2 & 10\\ -5 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=-7\cdot(70-9)-7\cdot(-14+45)+5\cdot(-2+50)=-427-217+240=-404$$

$$V=\frac{1}{6}\cdot|p|=\frac{1}{6}\cdot|-404|=\frac{202}{3}\ \text{ед.}^3$$

3.11. Сила $\overline{F}(4;7;-3)$ приложена к точке $A(5;-4;2)$. Вычислить: а) работу силы $\overline{F}$ в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(8;5;-4)$; б) модуль момента силы $\overline{F}$ относительно точки B.

Решение:

а) $\overline{AB}(8-5;5-(-4);-4-2)=\overline{AB}(3;9;-6)$

Искомая работа силы:

$\overline{F}\cdot\overline{AB}=4\cdot 3+7\cdot 9-3\cdot(-6)=12+63+18=93$

б) Найдем модуль момента силы $\overline{F}$ относительно точки B.

$$\left[\overline{F}\times\overline{AB}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 4 & 7 & -3\\ 3 & 9 & -6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7 & -3\\ 9 & -6\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}4 & -3\\ 3 & -6\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}4 & 7\\ 3 & 9\end{vmatrix}\bar{k}=$$

$$=(-42+27)\bar{i}-(-24+9)\bar{j}+(36-21)\bar{k}=-15\bar{i}+15\bar{j}+15\bar{k}$$

$$\left|\left[\overline{F}\times\overline{AB}\right]\right|=\sqrt{(-15)^2+15^2+15^2}=15\sqrt{3}$$

ИДЗ-3.1

1.11. Даны четыре точки $A_1(4;2;5)$, $A_2(0;7;1)$, $A_3(0;2;7)$, $A_4(1;5;0)$.

Решение: Для решения задания найдем векторы:

$\overline{A_1A_2}=(0-4;7-2;1-5)=(-4;5;-4)$

$\overline{A_1A_3}=(0-4;2-2;7-5)=(-4;0;2)$

$\overline{A_1A_4}=(1-4;5-2;0-5)=(-3;3;-5)$

а) Составим уравнение плоскости $A_1A_2A_3$

Найдем векторное произведение:

$$\overline{N}=[A_1A_2\times A_1A_3]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -4 & 5 & -4\\ -4 & 0 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & -4\\ 0 & 2\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}-4 & -4\\ -4 & 2\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}-4 & 5\\ -4 & 0\end{vmatrix}\bar{k}=$$

$$=(10-0)\bar{i}-(-8-16)\bar{j}+(0+20)\bar{k}=10\bar{i}+24\bar{j}+20\bar{k}$$

Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ составим по точке $A_1(4;2;5)$ и вектору нормали $\overline{N}=10\bar{i}+24\bar{j}+20\bar{k}$:

$10(x-4)+24(y-2)+20(z-5)=0$

$5(x-4)+12(y-2)+10(z-5)=0$

$5x-20+12y-24+10z-50=0$

$A_1A_2A_3: 5x+12y+10z-94=0$

б) Уравнения прямой A_1A_2 составим по точке $A_1(4;2;5)$ и направляющему вектору $\overline{A_1A_2}(-4;5;-4)$: $\dfrac{x-4}{-4}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z-5}{-4}$ – канонические уравнения прямой A_1A_2.

в) Уравнения прямой A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$, составим по точке $A_4(1;5;0)$ и направляющему вектору $\overline{N} = 10\bar{i} + 24\bar{j} + 20\bar{k}$:

$\frac{x-1}{10} = \frac{y-5}{24} = \frac{z}{20}$ – канонические уравнения прямой A_4M.

г) Уравнения прямой A_3N, параллельной прямой A_1A_2, составим по точке $A_3(0;2;7)$ и направляющему вектору $\overline{A_1A_2}(-4;5;-4)$:

$\frac{x}{-4} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-7}{-4}$ – канонические уравнения прямой A_3N.

д) Уравнение плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2, составим по точке $A_4(1;5;0)$ и вектору нормали $\overline{A_1A_2}(-4;5;-4)$.

$$-4(x-1)+5(y-5)-4(z-0)=0$$
$$4(x-1)-5(y-5)+4z=0$$
$$4x-4-5y+25+4z=0$$
$$4x-5y+4z+21=0$$

е) синус угла φ_1 между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$ вычислим по формуле:

$$\sin\varphi_1 = \frac{\left|\overline{A_1A_4}\cdot\overline{N}\right|}{\left|\overline{A_1A_4}\right|\cdot\left|\overline{N}\right|} = \frac{\left|\overline{A_1A_4}\cdot\overline{N}\right|}{\left|\overline{A_1A_4}\right|\cdot\left|\overline{N}\right|} = \frac{|-3\cdot 10+3\cdot 24-5\cdot 20|}{\sqrt{(-3)^2+3^2+(-5)^2}\cdot\sqrt{10^2+24^2+20^2}} =$$
$$= \frac{|-30+72-100|}{\sqrt{9+9+25}\cdot\sqrt{100+576+400}} = \frac{|-58|}{\sqrt{43}\cdot\sqrt{1076}} = \frac{58}{\sqrt{43}\cdot 2\sqrt{269}} = \frac{29}{\sqrt{11567}} \approx 0{,}27$$

д) Косинус угла φ_2 между координатной плоскостью OXY и плоскостью $A_1A_2A_3$ вычислим по формуле:

$$\cos\varphi_2 = \frac{\bar{k}\cdot\overline{N}}{|\bar{k}|\cdot\left|\overline{N}\right|} = \frac{0\cdot 10+0\cdot 24+1\cdot 20}{1\cdot 2\sqrt{269}} = \frac{10}{\sqrt{269}} \approx 0{,}61$$

2.11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;3;-4)$ параллельно двум векторам $\bar{a}(4;1;-1)$, $\bar{b}(2;-1;2)$

Решение:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 4 & 2 \\ y-3 & 1 & -1 \\ z+4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (y-3)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (z+4)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$
$$(x-2)(2-1)-(y-3)(8+2)+(z+4)(-4-2)=0$$
$$x-2-10(y-3)-6(z+4)=0$$
$$x-2-10y+30-6z-24=0$$

Ответ: $x-10y-6z+4=0$

3.11. При каких значениях m и C прямая $\frac{x-2}{m}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-3}$ перпендикулярна к плоскости $3x-2y+Cz+1=0$?

Решение: $\overline{p}(m;4;-3)$ – направляющий вектор прямой. Вектор нормали плоскости: $\overline{n}(3;-2;C)$. Прямая будет перпендикулярна плоскости в том случае, если векторы $\overline{p}$ и $\overline{n}$ – коллинеарны, то есть их соответствующие координаты пропорциональны:

$$\frac{m}{3}=\frac{4}{-2}=\frac{-3}{C}=-2$$

$$\frac{m}{3}=-2 \Rightarrow m=-6$$

$$\frac{-3}{C}=-2 \Rightarrow C=\frac{3}{2}=1{,}5$$

Ответ: $m=-6$, $C=\frac{3}{2}=1{,}5$

ИДЗ-3.2

1.11. Даны вершины треугольника $A(1;-6), B(3;4), C(-3;3)$

Решение:

а) Уравнение стороны AB составим по двум точкам $A(1;-6), B(3;4)$

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y+6}{4+6}$$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+6}{10}$$

$$5\cdot(x-1)=y+6$$

$$5x-5=y+6$$

$$AB: 5x-y-11=0$$

б) Найдем уравнение высоты CH.

$$AB: 5x-y-11=0$$

$\overline{n}(5;-1)$ – вектор нормали стороны AB. Уравнение высоты CH составим по точке $C(-3;3)$ и направляющему вектору $\overline{n}(5;-1)$:

$$\frac{x+3}{5}=\frac{y-3}{-1}$$

$$-x-3=5y-15$$

$$CH: x+5y-12=0$$

в) Составим уравнение медианы AM. Точка M – середина стороны BC. Найдем ее координаты. Используем формулы координат середины отрезка:

$B(3;4), C(-3;3)$, $D(x;y)$

$$x=\frac{3-3}{2}=0,\quad y=\frac{4+3}{2}=\frac{7}{2}$$

$M\left(0;\frac{7}{2}\right)$

Уравнение медианы AM составим по двум точкам $A(1;-6)$, $M\left(0;\frac{7}{2}\right)$:

$$\frac{x-1}{0-1}=\frac{y+6}{\frac{7}{2}+6}$$

$$\frac{19}{2}\cdot(x-1)=-y-6$$

$$19\cdot(x-1)=-2y-12$$

$$19x-19=-2y-12$$

$$AM:19x+2y-7=0$$

г) Найдем точку $N=AM\cap CH$

$$N:\begin{cases}19x+2y-7=0\\x+5y-12=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}19x+2y-7=0\\19x+95y-228=0\end{cases}\Rightarrow 93y-221\Rightarrow y=\frac{221}{93}$$

$$x=-5\cdot\frac{221}{93}+12=\frac{11}{93}$$

$$N\left(\frac{11}{93};\frac{221}{93}\right)$$

д) Уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB, составим по точке $C(-3;3)$ и направляющему вектору $\overline{AB}=(3-1;4-(-6))=(2;10)$

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y-3}{10}$$

$$5(x+3)=y-3$$

$$5x+15=y-3$$

$5x-y+18=0$ – искомое уравнение.

е) Найдем расстояние от точки $C(-3;3)$ до прямой $AB:5x-y-11=0$:

$$\rho(C;AB)=\frac{|5\cdot(-3)-3-11|}{\sqrt{5^2+(-1)^2}}=\frac{29}{\sqrt{26}}\ \textit{ед.}\approx 5{,}69\ \textit{ед.}$$

2.11. Через точку пересечения прямых $6x-4y+5=0$, $2x+5y+8=0$ провести прямую, параллельную оси абсцисс.

Решение: Найдем точку пересечения прямых:

$$M:\begin{cases}6x-4y+5=0\\2x+5y+8=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6x-4y+5=0\\6x+15y+24=0\end{cases}\Rightarrow 19y+19=0\Rightarrow y=-1;x=\frac{1}{2}(5-8)=-\frac{3}{2}$$

$$M\left(-\frac{3}{2};-1\right)$$

Уравнение искомой прямой составим по точке $M\left(-\frac{3}{2};-1\right)$ и направляющему вектору $\bar{i}(1;0)$:

$$\frac{x+\frac{3}{2}}{1}=\frac{y+1}{0}$$

$$0\cdot\left(x+\frac{3}{2}\right)=y+1$$

Ответ: $y+1=0$