Сокращения:
ДУ – дифференциальное уравнение;
о/р – общее решение;
о/и – общий интеграл;
ч/р – частное решение.

ИДЗ-11.1

1.14. Найти о/и ДУ.

$$3^{x^2+y}dy + xdx = 0$$

Решение: Данное уравнение допускает разделение переменных. Разделяем переменные и интегрируем:

$$3^{x^2}\cdot 3^y dy = -xdx$$

$$3^y dy = -x3^{-x^2}dx$$

$$\int 3^y dy = \frac{1}{2}\int 3^{-x^2}d(-x^2)$$

$$\frac{3^y dy}{\ln 3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3^{-x^2}}{\ln 3} + C$$

Ответ: о/и: $3^y dy = \dfrac{3^{-x^2}}{2} + C\ln 3,$ где $C = const$

2.14. Найти о/и ДУ.

$$y - xy' = 3(1 + x^2 y')$$

Решение: Данное уравнение допускает разделение переменных. Разделяем переменные и интегрируем:

$$y - xy' = 3 + 3x^2 y'$$

$$3x^2 y' + xy' = y - 3$$

$$(3x^2 + x)\frac{dy}{dx} = y - 3$$

$$\frac{dy}{y-3} = \frac{dx}{3x^2 + x}$$

$$\int\frac{dy}{y-3} = \int\frac{dx}{x(3x+1)}$$

Методом неопределенных коэффициентов разложим подынтегральную функцию в сумму элементарных дробей:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{3x+1} = \frac{1}{x(3x+1)}$$

$$A(3x+1) + Bx = 1$$

$$\begin{cases} 3A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow B = -3$$

$$\ln|y-3| = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{3x+1}\right)dx$$

$$\ln|y-3| = \int\frac{dx}{x} - \int\frac{d(3x+1)}{3x+1}$$

$$\ln|y-3| = \ln|x| - \ln|3x+1| + \ln|C|$$

$$\ln|y-3| = \ln\left|\frac{Cx}{3x+1}\right|$$

$$y-3 = \frac{Cx}{3x+1}$$

Ответ: о/р: $y = \dfrac{Cx}{3x+1} + 3$, где $C = const$

3.14. Найти о/и ДУ.

$$y' = \frac{y}{x} - 1$$

Решение: Данное уравнение является однородным, проведем замену:

$$y = tx \Rightarrow dy = t'x + t$$

$$t'x + t = \frac{tx}{x} - 1$$

$$t'x + t = t - 1$$

$$x\frac{dt}{dx} = -1$$

$$\int dt = -\int\frac{dx}{x}$$

$$t = -\ln|x| + \ln|C|$$

$$t = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

Обратная замена: $t = \dfrac{y}{x}$

$$\frac{y}{x} = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

Ответ: о/р: $y = x\ln\left|\dfrac{C}{x}\right|$, где $C = const$

4.14. Найти ч/р ДУ.

$$x(y' - y) = e^x, \; y(1) = 0$$

Решение: $xy' - xy = e^x$

Данное уравнение является линейным неоднородным, замена: $y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$

$$x(u'v+uv')-xuv=e^x$$
$$xu'v+xuv'-xuv=e^x$$
$$xu'v+xu(v'-v)=e^x$$

Решим систему: $\begin{cases} v'-v=0 \\ xu'v=e^x \end{cases}$.

Из первого уравнения найдем $v(x)$:

$$\frac{dv}{dx}=v$$
$$\int\frac{dv}{v}=\int dx$$
$$\ln|v|=x$$

$v=e^x$ – подставим во второе уравнение:

$$xu'e^x=e^x$$
$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}$$
$$u=\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$$

Таким образом:

о/р: $y=uv=(\ln|x|+C)\cdot e^x=Ce^x+e^x\ln|x|$, где $C=const$

Найдем ч/р, соответствующее заданному начальному условию:
$y(1)=Ce+0=0\Rightarrow C=0$

Ответ: ч/р: $y=e^x\ln|x|$

ИДЗ-11.2

1.14. Найти ч/р ДУ и вычислить значение полученной функции при $x=x_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

$$y''=tgx\cdot\frac{1}{\cos^2 x},\ x_0=\frac{\pi}{4},\ y(0)=\frac{1}{2},\ y'(0)=0$$

Решение:

Данное уравнение имеет вид $y^{(n)}=f(x)$. Дважды интегрируем правую часть:

$$y'=\int\frac{tgxdx}{\cos^2 x}=\int tgxd(tgx)=\frac{tg^2x}{2}+C_1$$

В соответствии с начальным условием:
$y'(0)=0+C_1=0\Rightarrow C_1=0$

$$y=\int\frac{tg^2xdx}{2}=\frac{1}{2}\int\frac{\sin^2 xdx}{\cos^2 x}=\frac{1}{2}\int\frac{(1-\cos^2 x)dx}{\cos^2 x}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\frac{1}{2}(tgx-x)+C_2$$

В соответствии с начальным условием:

$$y(0)=\frac{1}{2}(0-0)+C_2=\frac{1}{2}\Rightarrow C_2=\frac{1}{2}$$

Таким образом, искомое ч/р: $y=\dfrac{tgx-x+1}{2}$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\frac{\pi}{4}+1}{2}=\frac{2-\frac{\pi}{4}}{2}\approx 0{,}61$$

Ответ: ч/р: $y=\dfrac{tgx-x+1}{2}$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\approx 0{,}61$

4.14. Найти о/и ДУ.

$$\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=0$$

Решение:

$$P=\frac{\sin 2x}{y}+x,\ Q=y-\frac{\sin^2 x}{y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)_y^{/}=-\frac{\sin 2x}{y^2}+0=-\frac{\sin 2x}{y^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\left(y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\right)_x^{/}=0-\frac{2\sin x}{y^2}\cdot(\sin x)'_x=-\frac{2\sin x\cos x}{y^2}=-\frac{\sin 2x}{y^2}$$

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, значит, данное ДУ является уравнением в полных дифференциалах.

$$dF(x;y)=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=y-\frac{\sin^2 x}{y^2}$$

$$F(x;y)=\int\left(y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=\frac{y^2}{2}+\frac{\sin^2 x}{y}+\varphi(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\left(\frac{y^2}{2}+\frac{\sin^2 x}{y}+\varphi(x)\right)_x^{/}=0+\frac{2\sin x\cos x}{y}+\varphi'_x(x)=\frac{\sin 2x}{y}+\varphi'_x(x)=\frac{\sin 2x}{y}+x$$

$$\varphi'_x(x)=x\Rightarrow\varphi(x)=\frac{x^2}{2}+C$$

Ответ: о/и: $\dfrac{y^2+x^2}{2}+\dfrac{\sin^2 x}{y}=C$, где $C=const$

ИДЗ-11.3

1.14. Найти о/р ДУ.

а) $2y''+3y'+y=0$

Решение: Характеристическое уравнение:
$2\lambda^2+3\lambda+1=0$
$D=9-8=1;\ \sqrt{D}=1$
$\lambda_{1,2}=\dfrac{-3\pm1}{4}$
$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-\dfrac{1}{2}$ – различные действительные корни

Ответ: о/р: $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-\frac{x}{2}},\ где\ \ C_1,C_2-const$

б) $y''+4y'+8y=0$

Решение: Составим и решим характеристическое уравнение:
$\lambda^2+4\lambda+8=0$
$D=16-32=-16$
$\lambda_{1,2}=\dfrac{-4\pm4i}{2}=-2\pm2i$ – сопряженные комплексные корни

Ответ: о/р: $y=e^{-2x}(C_1\sin2x+C_2\cos2x),\ где\ \ C_1,C_2-const$

в) $y''-6y'+9=0$

Решение: Характеристическое уравнение:
$\lambda^2-6\lambda+9=0$
$(\lambda-3)^2=0$
$\lambda_{1,2}=3$ – кратные действительные корни

Ответ: о/р: $y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x},\ где\ \ C_1,C_2-const$

2.14. Найти о/р ДУ.
$y''+8y'+25y=18e^{5x}$

Решение: Найдем о/р соответствующего однородного уравнения:
$y''+8y'+25y=0$
Характеристическое уравнение:
$\lambda^2+8\lambda+25=0$

$D=64-100=-36$
$\lambda_{1,2}=\dfrac{-8\pm6i}{2}$

$\lambda_{1,2} = -4 \pm 3i$ – сопряженные комплексные корни, поэтому о/р:
$Y = e^{-4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

Ч/р неоднородного уравнения ищем в виде: $\tilde{y} = Ae^{5x}$.
$\tilde{y}' = 5Ae^{5x}$
$\tilde{y}'' = 25Ae^{5x}$

Подставим $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ в левую часть неоднородного уравнения:
$y'' + 8y' + 25y = 25Ae^{5x} + 40Ae^{5x} + 25Ae^{5x} = 90Ae^{5x} = 18e^{5x}$

$90A = 18 \Rightarrow A = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}$

Таким образом: $\tilde{y} = \frac{1}{5}e^{5x}$.

Ответ: о/р: $y = Y + \tilde{y} = e^{-4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \frac{1}{5}e^{5x}$, *где* $C_1, C_2 - const$

3.14. Найти о/р ДУ

$y'' + 3y' = 10 - 6x$

Решение: Найдем о/р соответствующего однородного уравнения:
$y'' + 3y' = 0$
Характеристическое уравнение:
$\lambda^2 + 3\lambda = 0$
$\lambda(\lambda + 3) = 0$
$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -3$ – различные действительные корни, поэтому о/р: $Y = C_1 + C_2e^{-3x}$

Ч/р неоднородного уравнения ищем в виде: $\tilde{y} = Ax^2 + Bx$.
$\tilde{y}' = 2Ax + B$
$\tilde{y}'' = 2A$
Подставим $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ в левую часть неоднородного уравнения:
$y'' + 3y' = 2A + 6Ax + 3B$
$\begin{cases} 6A = -6 \\ 2A + 3B = 10 \end{cases} \Rightarrow A = -1; B = 4$

Таким образом: $\tilde{y} = -x^2 + 4x$

Ответ: о/р: $y = Y + \tilde{y} = C_1 + C_2e^{-3x} - x^2 + 4x$, *где* $C_1, C_2 - const$

4.14. Найти ч/р ДУ, соответствующее заданным начальным условиям.
$y'' + 25y = e^x(\cos 5x - 10 \sin 5x)$; $y(0) = 3$; $y'(0) = -4$

Решение: Найдем о/р соответствующего однородного уравнения:
$y'' + 25y = 0$
Характеристическое уравнение:
$\lambda^2 + 25 = 0$
$\lambda_{1,2} = \pm 5i$ – сопряженные комплексные корни, поэтому о/р: $Y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$.
Ч/р неоднородного уравнения ищем в виде: $\tilde{y} = e^x (A\cos 5x + B\sin 5x)$.

$\tilde{y}' = e^x (A\cos 5x + B\sin 5x) + e^x(-5A\sin 5x + 5\cos 5x) =$

$= e^x ((A + 5B)\cos 5x + (-5A + B)\sin 5x)$

$\tilde{y}'' = e^x((A+5B)\cos 5x + (-5A+B)\sin 5x) + e^x((-5A - 25B)\sin 5x + (-25A + 5B)\cos 5x) =$

$= e^x((-24A + 10B)\cos 5x + (-10A - 24B)\sin 5x)$

Подставим $\tilde{y}$ и $\tilde{y}''$ в левую часть неоднородного уравнения:

$y'' + 25y = e^x((-24A + 10B)\cos 5x + (-10A - 24B)\sin 5x) + e^x(25A\cos 5x + 25B\sin 5x) =$

$= e^x((A + 10B)\cos 5x + (-10A + B)\sin 5x) = e^x(\cos 5x - 10\sin 5x)$

$$\begin{cases} A + 10B = 1 \\ -10A + B = -10 \end{cases} \Rightarrow B = 0; A = 1$$

Таким образом: $\tilde{y} = e^x \cos 5x$.

О/р неоднородного уравнения:
$y = Y + \tilde{y} = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x + e^x \cos 5x,\ \textit{где}\ \ C_1, C_2 - const$

Найдем ч/р, соответствующее заданным начальным условиям:
$y' = -5C_1 \sin 5x + 5C_2 \cos 5x + e^x \cos 5x - 5e^x \sin 5x$

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + 1 = 3 \\ y'(0) = 5C_2 + 1 = -4 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 2; C_2 = -1$$

Ответ: ч/р: $y = 2\cos 5x - \sin 5x + e^x \cos 5x$

5.14. Определить и записать структуру ч/р y^* линейного неоднородного ДУ по виду функции $f(x)$
$4y'' - 5y' + y = f(x)$

а) $f(x) = (4x + 2)e^x$ б) $f(x) = e^x \sin 3x$

Решение: Найдем о/р однородного уравнения:
$4\lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0$
$D = 25 - 16 = 9; \sqrt{D} = 3$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{5 \pm 3}{8}$

$\lambda_1 = \dfrac{1}{4},\ \lambda_2 = 1$ – различные действительные корни, поэтому о/р:

$Y = C_1 e^{\frac{x}{4}} + C_2 e^x,\ \text{где}\ \ C_1, C_2 - const$

а) Правая часть имеет вид $f(x) = (4x+2)e^x$.

Контрольное число правой части $\alpha = 1$ является корнем характеристического уравнения, в произведение правой части входит многочлен первой степени, поэтому ч/р неоднородного уравнения следует искать в виде $\tilde{y} = (Ax^2 + Bx)e^x$

б) Если правая часть имеет вид $f(x) = e^x \sin 3x$, то ч/р неоднородного уравнения следует искать в виде $\tilde{y} = e^x (A\cos 3x + B\sin 3x)$.

ИДЗ-11.4

3.14. Решить ДУ методом вариации произвольных постоянных

$y'' + y = ctgx$

Решение: Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:
$y'' + y = 0$
$\lambda_{1,2} = \pm i$ – сопряженные комплексные корни, поэтому общее решение: $Y = C_1^* \cos x + C_2^* \sin x\ \text{где}\ \ C_1^*, C_2^* - const$.

Используем метод вариации произвольных постоянных. Общее решение неоднородного уравнения ищем в виде: $y = Z_1(x)\cos x + Z_2(x)\sin x$
Функции $Z_1(x)$, $Z_2(x)$ найдем как решение системы:

$$\begin{cases} Z_1'(x)y_1 + Z_2'(x)y_2 = 0 \\ Z_1'(x)y_1' + Z_2'(x)y_2' = \dfrac{f(x)}{a_0(x)} \end{cases}$$

В данном случае: $y_1 = \cos x$, $y_1' = -\sin x$, $y_2 = \sin x$, $y_2' = \cos x$,
$f(x) = ctgx$
$a_0(x) = 1$

Таким образом:

$$\begin{cases} \cos x \cdot Z_1'(x) + \sin x \cdot Z_2'(x) = 0 \\ -\sin x \cdot Z_1'(x) y_1' + \cos x \cdot Z_2'(x) = ctgx \end{cases}$$

Систему решим по формулам Крамера:

$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0$, значит, система имеет единственное решение.

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ ctgx & \cos x \end{vmatrix} = 0 - ctgx \cdot \sin x = -\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \sin x = -\cos x$$

$$Z_1'(x) = \frac{W_1}{W} = \frac{-\cos x}{1} = -\cos x$$

$$Z_1(x) = -\int \cos x dx = -\sin x + C_1$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & ctgx \end{vmatrix} = \cos x \cdot ctgx = \cos x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos^2 x}{\sin x}$$

$$Z_1'(x) = \frac{W_2}{W} = \frac{\frac{\cos^2 x}{\sin x}}{1} = \frac{\cos^2 x}{\sin x}$$

$$Z_2(x) = \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin x} = \int \frac{(1-\sin^2 x)dx}{\sin x} = \int \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x\right)dx = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + \cos x + C_2$$

В результате:

$$y = (-\sin x + C_1)\cos x + \left(\ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + \cos x + C_2\right)\sin x =$$

$$= -\sin x \cos x + C_1 \cos x + \sin x \cdot \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + \sin x \cos x + C_2 \sin x$$

Ответ: общее решение:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sin x \cdot \ln\left|tg\frac{x}{2}\right|, \ \textit{где} \ C_1, C_2 - const$$