ИДЗ-10.1

1.8. Найти область определения указанной функции.

$$z = 3x + \frac{y}{2-x+y}$$

Решение: Область определения:

$2 - x + y \neq 0 \Rightarrow y \neq x - 2$

Ответ: Область определения: Все точки координатной плоскости кроме прямой $y = x - 2$.

2. Найти частные производные и частные дифференциалы данной функции.

2.8. $z = e^{-x^2+y^2}$

Найдем частные производные:

$$z'_x = \left(e^{-x^2+y^2}\right)'_x = e^{-x^2+y^2} \cdot (-x^2+y^2)'_x = -2xe^{-x^2+y^2}$$

$$z'_y = \left(e^{-x^2+y^2}\right)'_y = e^{-x^2+y^2} \cdot (-x^2+y^2)'_y = 2ye^{-x^2+y^2}$$

Частные дифференциалы:

$$dz'_x = -2xe^{-x^2+y^2}dx, \; dz'_y = 2ye^{-x^2+y^2}dy$$

3. Вычислить значения частных производных $f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0)$ для данной функции $f(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

3.8. $f(x,y,z) = arctg(xy^2+z)$, $M_0(2,1,0)$

Решение:

$$f'_x = \left(arctg(xy^2+z)\right)'_x = \frac{1}{1+(xy^2+z)^2} \cdot ((xy^2+z))'_x = \frac{y^2}{1+(xy^2+z)^2}$$

$$f'_x(M_0) = f'_x(2,1,0) = \frac{1}{1+2^2} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

$$f'_y = \left(arctg(xy^2+z)\right)'_y = \frac{1}{1+(xy^2+z)^2} \cdot ((xy^2+z))'_y = \frac{2xy}{1+(xy^2+z)^2}$$

$$f'_y(M_0) = f'_y(2,1,0) = \frac{4}{1+2^2} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

$$f'_z = \left(arctg(xy^2+z)\right)'_z = \frac{1}{1+(xy^2+z)^2} \cdot ((xy^2+z))'_z = \frac{1}{1+(xy^2+z)^2}$$

$$f'_z(M_0) = f'_z(2,1,0) = \frac{1}{1+2^2} = 0{,}2$$

4. Найти полные дифференциалы указанных функций.

4.8. $z = 5xy^2 - 3x^3y^4$

Вычислим частные производные первого порядка:

$z'_x = \left(5xy^2 - 3x^3y^4\right)'_x = 5y^2 - 9x^2y^4$

$z'_y = \left(5xy^2 - 3x^3y^4\right)'_y = 10xy - 12x^3y^3$

Полный дифференциал:

$dz = z'_x dx + z'_y dy = (5y^2 - 9x^2y^4)dx + (10xy - 12x^3y^3)dy$

5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x, y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, при $t = t_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

5.8. $u = e^{y-2x}$, $x = \sin t$, $y = t^3$, $t_0 = 0$.

Найдем производную сложной функции: $u'_t = u'_x \cdot x'_t + u'_y \cdot y'_t$.

В данном случае:

$u'_x = \left(e^{y-2x}\right)'_x = e^{y-2x} \cdot (y - 2x)'_x = -2e^{y-2x}$

$u'_y = \left(e^{y-2x}\right)'_y = e^{y-2x} \cdot (y - 2x)'_y = e^{y-2x}$

$x'_t = \cos t$, $y'_t = 3t^2$

Таким образом:

$u'_t = -2e^{y-2x} \cdot \cos t + e^{y-2x} \cdot 3t^2 = -2e^{t^3 - 2\sin t} \cdot \cos t + e^{t^3 - 2\sin t} \cdot 3t^2$

$u'_t(0) = -2 \cdot e^0 \cdot 1 + e^0 \cdot 0 = -2 + 0 = -2$

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x, y)$, заданной неявно, в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

6.8. $e^{z-1} = \cos x \cos y + 1$, $M_0\left(0, \frac{\pi}{2}, 1\right)$

$\left(e^{z-1}\right)'_x = (\cos x \cos y + 1)'_x$

$e^{z-1} z'_x = -\sin x \cos y + 0$

$z'_x = \frac{-\sin x \cos y}{e^{z-1}}$

$z'_x(M_0) = z'_x\left(0, \frac{\pi}{2}, 1\right) = \frac{-0 \cdot 0}{e^0} = 0$

$\left(e^{z-1}\right)'_y = (\cos x \cos y + 1)'_y$

$e^{z-1} z'_y = -\cos x \sin y + 0$

$z'_y = \frac{-\cos x \sin y}{e^{z-1}}$

$z'_y(M_0) = z'_y\left(0, \frac{\pi}{2}, 1\right) = \frac{-1 \cdot 1}{e^0} = -1$

ИДЗ 10-2.

3. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция u.

3.8. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, $u=y\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

Найдем частные производные функции u.

$$u'_x=\left(y\sqrt{\frac{y}{x}}\right)'_x=y^{\frac{3}{2}}\cdot\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'_x=-\frac{1}{2}y^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$u''_{xx}=\left(-\frac{1}{2}y^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{3}{2}}\right)'_x=-\frac{1}{2}y^{\frac{3}{2}}\cdot\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)'_x=\frac{3}{4}y^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{5}{2}}$$

$$u'_y=\left(y\sqrt{\frac{y}{x}}\right)'_y=x^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(y^{\frac{3}{2}}\right)'_y=\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$$

$u''_{yy}=\left(\dfrac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right)'_y=\dfrac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(y^{\frac{1}{2}}\right)'_y=\dfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}$ Подставим u''_{xx}, u''_{yy} в левую часть уравнения:

$x^2\cdot\dfrac{3}{4}y^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{5}{2}}-y^2\cdot\dfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{4}y^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{1}{2}}-\dfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}=0$ – таким образом, данная функция удовлетворяет данному уравнению.

4. Исследовать на экстремум функцию.

4.8. $z=x^2+xy+y^2+x-y+1$

Решение: Найдем критические точки:

$\begin{cases} z'_x=2x+y+1=0 \\ z'_y=x+2y-1=0 \end{cases} \Rightarrow y=-2x-1$ – подставим во второе уравнение:

$x+2(-2x-1)-1=0 \Rightarrow -3x=3 \Rightarrow x=-1;\ y=1$

$M_1(-1;1)$ – стационарная точка.

Проверим выполнение достаточного условия экстремума:

$z''_{xx}=2=const$, $z''_{xy}=1=const$, $z''_{yy}=2=const$

$z''_{xx}(M_1)\cdot z''_{yy}(M_1)-\left(z''_{xy}(M_1)\right)^2=2\cdot 2-1^2=3>0$, значит, в точке $M_1(-1;1)$ существует экстремум, так как $z''_{xx}(M_2)>0$, то это – минимум:

$\min z=z(M_1)=z(-1;1)=1-1+1-1-1+1=0$

Ответ: $\min z=z(-1;1)=0$.