1.7. Из девяти значащих цифр составляются трехзначные числа. Сколько различных чисел может быть составлено?

Решение:

$C_9^1 = 9$ способами можно выбрать значащую цифру для каждого из трех разрядов.

$C_9^1 \cdot C_9^1 \cdot C_9^1 = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ трехзначных чисел со значащими цифрами можно составить.

Ответ: 729

2.7. Из восьми книг две художественные. Найти вероятность того, что среди взятых наугад четырех книг хотя бы одна художественная.

Решение:

$C_8^4 = \dfrac{8!}{4!4!} = \dfrac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{24} = 70$ способами можно выбрать 4 книги из восьми.

$C_6^4 = \dfrac{6!}{2!4!} = \dfrac{5 \cdot 6}{2} = 15$ способами можно выбрать 4 не художественные книги.

По классическому определению вероятности:

$p = \dfrac{C_6^4}{C_8^4} = \dfrac{15}{70} = \dfrac{3}{14} \approx 0{,}214$ – вероятность того, что среди выбранных четырех книг не будет художественных.

По теореме сложения вероятностей противоположных событий:

$q = 1 - p \approx 1 - \dfrac{3}{14} = \dfrac{11}{14} \approx 0{,}785$ – вероятность того, что среди выбранных четырех книг будет хотя бы одна художественная.

Ответ: $\dfrac{11}{14} \approx 0{,}785$

3.7. Вычислительная машина состоит из четырех блоков. Вероятность безотказной работы в течение времени T первого блока равна 0,4, второго – 0,5, третьего – 0,6, четвертого – 0,4. Найти вероятность того, что в течение времени T проработают: а) все четыре блока; б) три блока; в) менее трех блоков.

Решение: по условию: $p_1 = 0{,}4$, $p_2 = 0{,}5$, $p_3 = 0{,}6$, $p_4 = 0{,}4$ – вероятности безотказной работы соответствующих блоков в течение времени T.

Тогда вероятности их отказа:

$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

$q_4 = 1 - p_4 = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

а) По теореме умножения независимых событий:

$p = p_1 p_2 p_3 p_4 = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 0,048$ – вероятность того, что в течение времени T проработают все четыре блока.

б)

$p(3) = q_1 p_2 p_3 p_4 + p_1 q_2 p_3 p_4 + p_1 p_2 q_3 p_4 + p_1 p_2 p_3 q_4 =$

$= 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,6 =$

$= 0,072 + 0,048 + 0,032 + 0,072 = 0,224$ – вероятность того, что в течение времени T проработают только три блока.

в) По теореме сложения вероятностей противоположных событий:

$p(<3) = 1 - (p(3) + p(4)) = 1 - (0,048 + 0,224) = 0,728$ – вероятность того, что в течение времени T проработают менее трех блоков.

Ответ: а) 0,048 б) 0,224 в) 0,728

4.7. На двух станках обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для станка № 1 составляет 0,03, для станка № 2 – 0,02. Обработанные детали складываются в одном месте, причем деталей, обработанных на станке № 1, вдвое больше, чем деталей, обработанных на станке № 2. Найти вероятность того, что: а) взятая наугад деталь будет стандартной; б) наугад взятая стандартная деталь изготовлена на первом станке.

Решение: Пусть x – количество деталей, изготавливаемых на станке № 2, тогда количество изготавливаемых деталей на станке № 1: $2x$

$2x + x = 1$

$3x = 1$

$x = \frac{1}{3}$

$p_1 = \frac{2}{3}$, $p_2 = \frac{1}{3}$ – вероятности того, что деталь изготовлена первым и вторым станком соответственно.

Из условия находим:

$\overline{p}_1 = 1 - \frac{3}{100} = \frac{97}{100}$, $\overline{p}_2 = 1 - \frac{2}{100} = \frac{98}{100}$ – вероятности того, что деталь, изготовленная на первом и втором станке соответственно, будет стандартной.

а) По формуле полной вероятности:

$p = p_1 \overline{p}_1 + p_2 \overline{p}_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{97}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{98}{100} = \frac{194}{300} + \frac{98}{300} = \frac{292}{300} = \frac{73}{75}$ – вероятность того, что взятая наугад деталь будет стандартной.

б) По формуле Байеса:

$p_1^* = \frac{p_1 \overline{p}_1}{p} = \frac{194}{300} \cdot \frac{75}{73} = \frac{97}{146}$ – вероятность того, что наугад взятая стандартная деталь изготовлена на первом станке.

Ответ: а) $\frac{73}{75} \approx 0,973$ б) $\frac{97}{146} \approx 0,664$

5.7. В телеателье имеется 7 телевизоров. Для каждого телевизора вероятность того, что в данный момент он включен, равна 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) четыре телевизора; б) хотя бы один телевизор; в) не менее трех телевизоров.

Решение: Используем формулу Бернулли:
$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$, в данной задаче:
$n = 6$ – всего телевизоров;
m – вероятное количество включенных телевизоров;
$p = 0{,}6$ – вероятность того, что телевизор включен;
$q = 1 - p = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$ – вероятность того, что телевизор выключен;
P_7^m – вероятность того, что из 7 телевизоров включены ровно m.

а) $P_7^4 = C_7^4 \cdot (0{,}6)^4 \cdot (0{,}4)^3 = \dfrac{7!}{3! \cdot 4!} = \dfrac{5 \cdot 6 \cdot 7}{6} \cdot (0{,}6)^4 \cdot (0{,}4)^3 = 0{,}290304$ – вероятность того, что в данный момент включены четыре телевизора

б) $P_7^0 = C_7^0 \cdot (0{,}6)^0 \cdot (0{,}4)^7 = (0{,}4)^7 = 0{,}0016384$ – вероятность того, что в данный момент все телевизоры выключены.

По теореме сложения вероятностей противоположных событий:
$P(m \ge 1) = 1 - P_7^0 = 1 - 0{,}0016384 = 0{,}9983616$ – вероятность того, что в данный момент включен хотя бы один телевизор.

в) По теореме сложения несовместных событий:

$P(m < 3) = P_7^0 + P_7^1 + P_7^2 = 0{,}0016384 + C_7^1 \cdot (0{,}6)^1 \cdot (0{,}4)^6 + C_7^2 \cdot (0{,}6)^2 \cdot (0{,}4)^5 =$
$= 0{,}0016384 + 0{,}0172032 + 0{,}0774144 = 0{,}096256$ – вероятность того, что в данный момент будут включены менее трех телевизоров.

По теореме сложения вероятностей противоположных событий:
$P(m \ge 3) = 1 - P(m < 3) = 1 - 0{,}096256 = 0{,}903744$ – вероятность того, что в данный момент будут включены не менее трех телевизоров.

Ответ: а) 0,290304 б) 0,9983616 в) 0,903744

6.7. Вероятность промаха при одном выстреле по мишени равна 0,1. Сколько выстрелов необходимо произвести, чтобы с вероятностью 0,9544 можно было утверждать, что относительная частота промаха отклонится от постоянной вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,03

Решение: Используем формулу $P\left(\left|\dfrac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\dfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)$.

В условиях данной задачи: $n = ?$, $P\left(\left|\dfrac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 0{,}9544$, $p = 0{,}1$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$, $\varepsilon = 0{,}03$. Таким образом:

$$2\Phi\left(\frac{0{,}03\sqrt{n}}{\sqrt{0{,}1\cdot 0{,}9}}\right)=0{,}9544$$

$$\Phi\left(0{,}1\sqrt{n}\right)=0{,}4772$$

$$0{,}1\sqrt{n}=2$$

$$\sqrt{n}=20$$

Ответ: 400