ИДЗ 8.1.

Найти неопределенные интегралы (в заданиях 1-5 результаты интегрирования проверить дифференцированием).

1.3.

$$\int \frac{3\sqrt{x}+4x^2-5}{2x^2}dx=\int\left(\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}+2-\frac{5}{2}x^{-2}\right)dx=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)}\cdot x^{-\frac{1}{2}}+2x+\frac{5}{2}\cdot x^{-1}+C=$$

$$=-\frac{3}{\sqrt{x}}+2x+\frac{5}{2x}+C,\ \text{где } C=const$$

Проверка:

$$\left(-\frac{3}{\sqrt{x}}+2x+\frac{5}{2x}+C\right)'=-3\cdot\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'+2(x)'+\frac{5}{2}\cdot\left(x^{-1}\right)'+(C)'=$$

$$=-3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^{-\frac{3}{2}}+2-\frac{5}{2}x^{-2}+0=\frac{3}{2\sqrt{x^3}}+2-\frac{5}{2x^2}=\frac{3\sqrt{x}+4x^2-5}{2x^2}$$

Получена исходная подынтегральная функция, таким образом, интеграл найден правильно.

2.3.

$$\int\sqrt[3]{(1+x)^2}dx=\int d(1+x)=\frac{3}{5}\cdot(1+x)^{\frac{5}{3}}+C=\frac{3}{5}\cdot\sqrt[3]{(1+x)^5}+C,\ \text{где } C=const$$

Проверка:

$$\left(\frac{3}{5}\cdot\sqrt[3]{(1+x)^5}+C\right)'=\frac{3}{5}\left((1+x)^{\frac{5}{3}}\right)'+(C)'=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}\cdot(1+x)^{\frac{2}{3}}\cdot(1+x)'=$$

$$=\sqrt[3]{(1+x)^2}\cdot(0+1)=\sqrt[3]{(1+x)^2}$$

Получена исходная подынтегральная функция, таким образом, интеграл найден правильно.

3.3.

$$\int\frac{dx}{2-3x}=-\frac{1}{3}\int\frac{d(2-3x)}{2-3x}=-\frac{1}{3}\ln|2-3x|+C,\ \text{где } C=const$$

Проверка:

$$\left(-\frac{1}{3}\ln|2-3x|+C\right)'=-\frac{1}{3}\left(\ln|2-3x|\right)'+(C)'=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2-3x}\cdot(2-3x)'=$$

$$=-\frac{1}{3(2-3x)}\cdot(0-3)=\frac{1}{(2-3x)}$$

Получена исходная подынтегральная функция, таким образом, интеграл найден правильно.

4.3.

$$\int\sin(5-3x)dx=-\frac{1}{3}\int\sin(5-3x)d(5-3x)=\frac{1}{3}\cos(5-3x)+C,\ \text{где } C=const$$

Проверка:

$$\left(\frac{1}{3}\cos(5-3x)+C\right)'=\frac{1}{3}(\cos(5-3x))'+(C)'=\frac{1}{3}\cdot(-\sin(5-3x))\cdot(5-3x)'=$$

$$=-\frac{1}{3}\sin(5-3x)\cdot(0-3)=\sin(5-3x)$$

Получена исходная подынтегральная функция, таким образом, интеграл найден правильно.

5.3.

$$\int\frac{dx}{9x^2+3}=\frac{1}{3}\int\frac{d(3x)}{(3x)^2+3}=\frac{1}{3}\int\frac{d(3x)}{(3x)^2+(\sqrt{3})^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{3x}{\sqrt{3}}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{3}}arctg\left(\sqrt{3}x\right)+C,\ \text{где } C=const$$

Проверка:

$$\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}arctg\left(\sqrt{3}x\right)+C\right)'=\frac{1}{3\sqrt{3}}\left(arctg\left(\sqrt{3}x\right)\right)'+(C)'=\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{1+\left(\sqrt{3}x\right)^2}\cdot\left(\sqrt{3}x\right)'+0=$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{1+3x^2}\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{3(1+3x^2)}=\frac{1}{9x^2+3}$$

Получена исходная подынтегральная функция, таким образом, интеграл найден правильно.

6.3.

$$\int\frac{3xdx}{4x^2+1}=(*)$$

Проведем замену:

$$t=4x^2+1\Rightarrow dt=(4x^2+1)'dx\Rightarrow dt=8xdx\Rightarrow xdx=\frac{dt}{8}$$

$$(*)=\frac{3}{8}\int\frac{dt}{t}=\frac{3}{8}\cdot\ln|t|+C=\frac{3}{8}\ln(4x^2+1)+C,\ \text{где } C=const$$

7.3.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{7x^2-3}}=\frac{1}{\sqrt{7}}\int\frac{d(\sqrt{7}x)}{\sqrt{(\sqrt{7}x)^2-3}}=\frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|\sqrt{7}x+\sqrt{7x^2-3}\right|+C,\ \text{где } C=const$$

8.3.

$$\int e^{2-3x}dx=-\frac{1}{3}\int e^{2-3x}d(2-3x)=-\frac{1}{3}e^{2-3x}+C,\ \text{где } C=const$$

9.3.

$$\int\frac{dx}{(1-x)\cdot\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}=(*)$$

Проведем замену: $t=\ln(1-x)\Rightarrow dt=\frac{-dx}{1-x}\Rightarrow\frac{dx}{1-x}=-dt$

$$(*)=-\int\frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}}=-\int t^{-\frac{2}{3}}dt=-3t^{\frac{1}{3}}+C=-3\cdot\sqrt[3]{\ln(1-x)}+C,\ \text{где } C=const$$

10.3

$$\int \frac{\sin 3x dx}{\cos^4 3x} = (*)$$

Проведем замену:

$$t = \cos 3x \Rightarrow dt = -3\sin 3x dx \Rightarrow \sin 3x dx = -\frac{dt}{3}$$

$$(*) = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^4} = -\frac{1}{3}\int t^{-4}dt = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(-3)}t^{-3} + C = \frac{1}{9\cos^3 3x} + C, \text{ где } C = const$$

11.3

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot ctg^4 x} = -\int \frac{d(ctgx)}{ctg^4 x} = \frac{1}{3ctg^3 x} + C, \text{ где } C = const$$

12.3

$$\int \frac{\arccos^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx = (*)$$

Проведем замену:

$$t = \arccos 3x \Rightarrow dt = -\frac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = -\frac{dt}{3}$$

$$(*) = -\frac{1}{3}\int t^2 dt = -\frac{1}{3}\cdot\frac{t^3}{3} + C = -\frac{\arccos^3 3x}{9} + C, \text{ где } C = const$$

13.3

$$\int \frac{x^2 dx}{e^{x^3+1}} = \int e^{-(x^3+1)}x^2 dx = (*)$$

Проведем замену:

$$t = -(x^3+1) \Rightarrow dt = -3x^2 dx \Rightarrow x^2 dx = -\frac{dt}{3}$$

$$(*) = -\frac{1}{3}\int e^t dt = -\frac{1}{3}e^t + C = -\frac{1}{3}e^{-(x^3+1)} + C, \text{ где } C = const$$

14.3

$$\int \frac{(2x+1)dx}{5x^2+1} = \int \frac{\frac{1}{5}d(5x^2+1) + dx}{5x^2+1} = \frac{1}{5}\int \frac{d(5x^2+1)}{5x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{d(\sqrt{5}x)}{(\sqrt{5}x)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{5}\ln(5x^2+1) + \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{5}x\right) + \text{C}, \text{где } C = const$$

ИДЗ 8.2.

Найти неопределенные интегралы

1.3

$$\int \frac{8-13x}{\sqrt{x^2-1}}dx = \int \frac{-\frac{13}{2}d(x^2-1)+8dx}{\sqrt{x^2-1}} = -13\int \frac{d(x^2-1)}{2\sqrt{x^2-1}} + 8\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= -13\cdot\sqrt{x^2-1} + 8\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + \text{C}, \text{где } C = const$$

2.3

$$\int \frac{\sin 3xdx}{3-\cos 3x} = (*)$$

Проведем замену:

$$t = 3-\cos 3x \Rightarrow dt = 3\sin 3xdx \Rightarrow \sin 3xdx = \frac{dt}{3}$$

$$(*) = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + C = \frac{1}{3}\ln|3-\cos 3x| + C, \text{ где } C = const$$

3.3

$$\int \frac{(x^3+2)dx}{x^2-1} = \int \frac{x(x^2-1)+x+2}{x^2-1}dx = \int\left(x+\frac{x}{x^2-1}+\frac{2}{x^2-1}\right)dx =$$

$$= \int xdx + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-1)}{x^2-1} + 2\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C, \text{ где } C = const$$

4.3

$$\int\left(1-2\sin\frac{x}{5}\right)^2 dx = \int\left(1-4\sin\frac{x}{5}+4\sin^2\frac{x}{5}\right)dx = \int\left(1-4\sin\frac{x}{5}+4\cdot\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2x}{5}\right)\right)dx =$$

$$= \int\left(3-4\sin\frac{x}{5}-2\cos\frac{2x}{5}\right)dx = 3x+20\cos\frac{x}{5}-5\sin\frac{2x}{5}+C, \text{ где } C = const$$

5.3

$$\int tg^4 3xdx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 3x}-1\right)tg^2 3xdx = \int \frac{tg^2 3xdx}{\cos^2 3x} - \int tg^2 3xdx =$$

$$= \frac{1}{3}\int tg^2 3xd(tg3x) - \int \frac{\sin^2 3xdx}{\cos^2 3x} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}tg^3 3x - \int \frac{(1-\cos^2 3x)dx}{\cos^2 3x}$$

$$= \frac{1}{9}tg^3 3x - \int\left(\frac{1}{\cos^2 3x}-1\right)dx = \frac{1}{9}tg^3 3x - \frac{1}{3}tg3x + x + C, \text{ где } C = const$$

6.3

$$\int \sin^2 3x\cos 3xdx = \frac{1}{3}\int \sin^2 3xd(\sin 3x)dx = \frac{1}{9}\sin^3 3x + C, \text{ где } C = const$$

7.3

$$\int\frac{dx}{2x^2-7x+1}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-\frac{7}{2}x+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-2\cdot\frac{7}{4}x+\frac{49}{16}+\frac{1}{2}-\frac{49}{16}}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{7}{4}\right)}{\left(x-\frac{7}{4}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{41}}{4}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{41}}{4}}\ln\left|\frac{x-\frac{7}{4}-\frac{\sqrt{41}}{4}}{x-\frac{7}{4}+\frac{\sqrt{41}}{4}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{41}}\ln\left|\frac{4x-7-\sqrt{41}}{4x-7+\sqrt{41}}\right|+C,\ \text{где } C=const$$

8.3

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x-2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{3}{2}x-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(x^2+2\cdot\frac{3}{4}x+\frac{9}{16}\right)+\frac{9}{16}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\left(x+\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2-\left(x+\frac{3}{4}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\left(x+\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{4}{5}\right)+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{4x+3}{5}\right)+C,$$

где $C=const$

9.3

$$\int\frac{(2x-1)dx}{3x^2-2x+6}=\int\frac{\frac{1}{3}d(3x^2-2x+6)+\left(\frac{2}{3}-1\right)dx}{3x^2-2x+6}=\frac{1}{3}\int\frac{d(3x^2-2x+6)}{3x^2-2x+6}-\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x^2-\frac{2}{3}x+2}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|3x^2-2x+6\right|-\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x^2-2\cdot\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+2}=\frac{1}{3}\ln\left|3x^2-2x+6\right|-$$

$$-\frac{1}{9}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{17}}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}\ln\left|3x^2-2x+6\right|-\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{\sqrt{17}}\,arctg\left(\left(x-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{3}{\sqrt{17}}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|3x^2-2x+6\right|-\frac{1}{3\sqrt{17}}\,arctg\left(\frac{3x-1}{\sqrt{17}}\right)+C,\ \text{где } C=const$$

10.3

$$\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{3x^2-x+5}} = \int \frac{\frac{1}{6}d(3x^2-x+5)+\left(\frac{1}{6}-1\right)dx}{\sqrt{3x^2-x+5}} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x^2-x+5)}{2\sqrt{3x^2-x+5}} - \frac{5}{6\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}}} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{3x^2-x+5} - \frac{5}{6\sqrt{3}}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{6}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+4-\frac{1}{36}}} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{3x^2-x+5} - \frac{5}{6\sqrt{3}}\ln\left|x-\frac{1}{6}+\sqrt{x^2-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}}\right| + C, \text{ где } C = const$$

ИДЗ-8.3.

Найти неопределенные интегралы

1.3

$$\int \frac{\sqrt{x^2+4}dx}{x} = (*)$$

Проведем замену: $t^2 = x^2+4;\ x^2 = t^2-4$

$$2tdt = 2xdx \Rightarrow tdt = \frac{x^2dx}{x} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{tdt}{t^2-4}$$

$$(*) = \int t\cdot\frac{tdt}{t^2-4} = \int \frac{t^2dt}{t^2-4} = \int \frac{(t^2-4+4)dt}{t^2-4} = \int\left(1+\frac{4}{t^2-4}\right)dt = \int dt + 4\int \frac{dt}{t^2-2^2} =$$

$$= t + \frac{4}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = \sqrt{x^2+4} + \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+4}+2}\right| + C, \text{ где } C = const$$

2.3

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-1}} = (*)$$

Замена:

$$x-1 = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2}; \quad x = \frac{1}{t}+1$$

$$(*) = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}+1\right)^2-1}} = -\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}+1-1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1+2t}} = -\int \frac{d(1+2t)}{2\sqrt{1+2t}} =$$

$$= -\sqrt{1+2t} + C = -\sqrt{1+\frac{2}{x-1}} + C = -\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C, \text{ где } C = const$$

5.3

$$\int x\sin x\cos x dx = \frac{1}{2}\int x\sin 2x dx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \frac{1}{2}\sin 2x dx \Rightarrow v = -\frac{1}{4}\cos 2x$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$(*) = -\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{4}\int \cos 2x dx = -\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C,\ \text{где } C = const$$

6.3.

$$\int (x-7)\cos 2x dx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$$u = x - 7 \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \cos 2x dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$(*) = \frac{1}{2}(x-7)\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = \frac{1}{2}(x-7)\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C,\ \text{где } C = const$$

7.3.

$$\int x^2 e^{-x} dx = (*)$$

Дважды интегрируем по частям:

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$$

$$dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x}$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$(*) = -x^2 e^{-x} + 2\int e^{-x} dx = (*)$$

$$u = 2x \Rightarrow du = 2dx$$

$$dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x}$$

$$(*) = -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C =$$

$$= -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C,\ \text{где } C = const$$

8.3.

$$\int \arcsin 3x dx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$$u = \arcsin 3x \Rightarrow du = \frac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}}$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$(*)=x\arcsin 3x-\int\frac{3xdx}{\sqrt{1-9x^2}}=x\arcsin 3x+\int\frac{\frac{1}{6}d(1-9x^2)}{\sqrt{1-9x^2}}=$$

$$=x\arcsin 3x+\frac{1}{3}\sqrt{1-9x^2}+C,\text{ где } C=const$$

ИДЗ-8.4.

1.3.

$$\int\frac{(43x-67)dx}{(x-1)(x^2-x-12)}=\int\frac{(43x-67)dx}{(x-1)(x-4)(x+3)}=(*)$$

Методом неопределенных коэффициентов разложим подынтегральную функцию в сумму элементарных дробей:

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-4}+\frac{C}{x+3}=\frac{(43x-67)}{(x-1)(x-4)(x+3)}$$

$$A(x-4)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x-4)=43x-67$$

$$A(x^2-x-12)+B(x^2+2x-3)+C(x^2-5x+4)=43x-67$$

$$\begin{cases}A+B+C=0\\-A+2B-5C=43\\-12A-3B+4C=-67\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=-A-B\\4A+7B=43\\-16A-7B=-67\end{cases}\Rightarrow -12A=-24$$

$$A=2;B=5;C=-7$$

$$(*)=\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{5}{x-4}-\frac{7}{x+3}\right)dx=2\ln|x-1|+5\ln|x-4|-7\ln|x+3|+C,\text{ где } C=const$$

2.3.

$$\int\frac{(3x^2+1)dx}{(x-1)(x^2-1)}=\int\frac{(3x^2+1)dx}{(x-1)^2(x+1)}=(*)$$

Методом неопределенных коэффициентов разложим подынтегральную функцию в сумму элементарных дробей:

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}=\frac{(3x^2+1)}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$A(x-1)(x+1)+B(x+1)+C(x-1)^2=3x^2+1$$

$$A(x^2-1)+B(x+1)+C(x^2-2x+1)=3x^2+1$$

$$\begin{cases}A+C=3\\B-2C=0\\-A+B+C=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=3-A\\B=2C\\-A+3(3-A)=1\end{cases}\Rightarrow 4A=8;A=2;C=1;B=2$$

$$(*)=\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}\right)dx=2\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+\ln|x+1|+C,\text{ где } C=const$$

3.3.

$$\int \frac{(12-6x)dx}{(x+1)(x^2-4x+13)} = (*)$$

Методом неопределенных коэффициентов разложим подынтегральную функцию в сумму элементарных дробей:

$$\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{(x^2-4x+13)} = \frac{12-6x}{(x+1)(x^2-4x+13)}$$

$$A(x^2-4x+13) + B(x^2+x) + C(x+1) = 12-6x$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -4A+B+C=-6 \\ 13A+C=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-A \\ -5A+C=-6 \\ 13A+C=12 \end{cases} \Rightarrow 18A=18$$

$$A=1; B=-1; C=-1$$

$$(*) = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x-1}{(x^2-4x+13)} \right) dx = \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{-\frac{1}{2}d(x^2-4x+13) - 3dx}{(x^2-4x+13)} =$$

$$= \ln|x+1| - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-4x+13)}{(x^2-4x+13)} - 3\int \frac{dx}{(x^2-4x+4+9)} =$$

$$= \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+13) - 3\int \frac{dx}{(x-2)^2+3^2} =$$

$$= \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+13) - arctg\left(\frac{x-2}{3}\right) + C, \text{ где } C = const$$

4.3.

$$\int \frac{(x^4+x^3+2x^2+x+2)dx}{x^4+5x^2+4} = (*)$$

Разделим числитель на знаменатель

$$\begin{array}{r|l} x^4+x^3+2x^2+x+2 & x^4+0x^3+5x^2+0x+4 \\ \cline{2-2} \underline{x^4+0x^3+5x^2+0x+4} & 1 \\ x^3-3x^2+x-2 & \end{array}$$

$$(*) = \int \left(1 + \frac{x^3-3x^2+x-2}{(x^2+1)(x^2+4)}\right) dx = x + \int \frac{(x^3-3x^2+x-2)}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = (*)$$

Методом неопределенных коэффициентов разложим подынтегральную функцию в сумму элементарных дробей:

$$\frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4} = \frac{x^3-3x^2+x-2}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

$$A(x^3+4x) + B(x^2+4) + C(x^3+x) + D(x^2+1) = x^3-3x^2+x-2$$

$$\begin{cases} A+C=1 \\ B+D=-3 \\ 4A+C=1 \\ 4B+D=-2 \end{cases} \Rightarrow A=0; C=1; 3B=1; B=\frac{1}{3}; D=-\frac{10}{3}$$

$$(*)=x+\int\left(\frac{\frac{1}{3}}{x^2+1}+\frac{x-\frac{10}{3}}{x^2+4}\right)dx=x+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+4)}{x^2+4}-\frac{10}{3}\int\frac{dx}{x^2+2^2}=$$

$$=x+\frac{1}{3}arctgx+\frac{1}{2}\ln(x^2+4)-\frac{5}{3}arctg\frac{x}{2}+C,\ \text{где } C=const$$

5.3.

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x-3}}=(*)$$

Проведем замену:

$$x-3=t^2;x=t^2+3\Rightarrow dx=2tdt$$

$$(*)=\int\frac{(t^2+3)^2\cdot 2tdt}{t}=\int(2t^4+12t^2+18)dt=\frac{2}{5}t^5+4t^3+18t\overset{t=\sqrt{x-3}}{=}$$

$$=\frac{2}{5}\sqrt{(x-3)^5}+4\sqrt{(x-3)^3}+18\sqrt{x-3}+C,\ \text{где } C=const$$

6.3.

$$\int\frac{(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1})dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}=\int\frac{(\sqrt{x+1}+1)dx}{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[6]{x+1}}=(*)$$

Проведем замену:

$$x+1=t^6\Rightarrow dx=6t^5dt$$

$$(*)=\int\frac{(t^3+1)\cdot 6t^5dt}{t^2+t}=\int\frac{(t+1)(t^2-t+1)\cdot 6t^5dt}{t(t+1)}=\int 6t^4\cdot(t^2-t+1)\cdot dt=$$

$$=\int(6t^6-6t^5+6t^4)dt=\frac{6}{7}t^7-t+\frac{6}{5}t^5+C=$$

$$=\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7}-(x+1)+\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5}+C,\ \text{где } C=const$$

7.3.

$$\int\frac{(3\sin x-2\cos x)dx}{1+\cos x}=(*)$$

Проведем универсальную тригонометрическую подстановку:

$$z=tg\frac{x}{2};x=2arctgz\Rightarrow dx=\frac{2dz}{1+z^2};\sin x=\frac{2z}{1+z^2};\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$$

$$(*)=\int\frac{\left(3\cdot\frac{2z}{1+z^2}-\frac{2(1-z^2)}{1+z^2}\right)\cdot\frac{2dz}{1+z^2}}{1+\frac{1-z^2}{1+z^2}}=\int\left(\frac{6z}{1+z^2}-\frac{2-2z^2}{1+z^2}\right)\cdot dz=\int\frac{2z^2+6z-2}{1+z^2}\cdot dz=$$

$$=\int\frac{2(1+z^2)+6z-4}{1+z^2}\cdot dz=2\int dz+3\int\frac{d(1+z^2)}{1+z^2}-4\int\frac{dz}{1+z^2}=$$

$$=2z+3\ln(1+z^2)-4arctgz+C=2tg\frac{x}{2}+3\ln\left(1+tg^2\frac{x}{2}\right)-4arctg\left(tg\frac{x}{2}\right)+C=$$

$$=2tg\frac{x}{2}+3\ln\left(1+tg^2\frac{x}{2}\right)-2x+C,\ \text{где } C=const$$

8.3.

$$\int\frac{dx}{1+3\cos^2 x}=\int\frac{dx}{1+3\cdot\frac{(1+\cos 2x)}{2}}=\int\frac{dx}{1+\frac{3}{2}+\frac{3\cos 2x}{2}}=\int\frac{2dx}{5+3\cos 2x}=(*)$$

$$z=tgx;\ x=arctgz\Rightarrow dx=\frac{dz}{1+z^2};\cos 2x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$$

$$(*)=2\int\frac{\frac{dz}{1+z^2}}{5+\frac{3(1-z^2)}{1+z^2}}=2\int\frac{dz}{5+5z^2+3-3z^2}=2\int\frac{dz}{2z^2+8}=\int\frac{dz}{z^2+2^2}=$$

$$=\frac{1}{2}arctg\frac{z}{2}+C=\frac{1}{2}arctg\left(\frac{tgx}{2}\right)+C,\ \text{где } C=const$$

9.3.

$$\int\cos^3 x\sin^8 xdx=\int\sin^8 x\cos^2 x\cos xdx=\int\sin^8 x(1-\sin^2 x)d(\sin x)\overset{\sin x=t}{=}$$

$$=\int t^8(1-t^2)dt=\int(t^8-t^{10})dt=\frac{t^9}{9}-\frac{t^{11}}{11}+C=\frac{\sin^9 x}{9}-\frac{\sin^{11}x}{11}+C,\ \text{где } C=const$$

ИДЗ-9.1.

Вычислить определенные интегралы с точностью до двух знаков после запятой

1.3.

$$\int_0^1\frac{x^2dx}{x^2+1}=\int_0^1\frac{(x^2+1-1)dx}{x^2+1}=\int_0^1\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=(x-arctgx)\Big|_0^1=$$

$$=1-arctg1-0=1-\frac{\pi}{4}\approx 0{,}21$$

2.3.

$$\int_0^{\pi/2}x\cos xdx=(*)$$

Интегрируем по частям:

$$u=x\Rightarrow du=dx$$

$$dv=\cos xdx\Rightarrow v=\sin x$$

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

$$(*)=(x\sin x)\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\sin xdx=\frac{\pi}{2}-0+(\cos x)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}+0-1=\frac{\pi}{2}-1\approx 0{,}57$$

5.3.

$$\int_0^{\pi/4}\sin^3 2xdx=\int_0^{\pi/4}\sin^2 2x\sin 2xdx=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(1-\cos^2 2x)d(\cos 2x)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos^3 2x}{3}-\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\pi/4}=\frac{1}{2}\left(0-0-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\approx 0{,}33$$

8.3. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость

а)

$$\int_0^{\infty}\frac{x^3dx}{\sqrt{16x^4+1}}=(*)$$

Подынтегральная функция непрерывна на $[0;+\infty)$

$$(*)=\frac{1}{64}\int_0^{\infty}\frac{d(16x^4+1)}{\sqrt{16x^4+1}}=\frac{1}{64}\cdot 2\lim_{b\to+\infty}\left(\sqrt{16x^4+1}\right)\Big|_0^b=$$

$$=\frac{1}{32}\lim_{b\to+\infty}\left(\overbrace{\sqrt{16b^4+1}}^{\to+\infty}-1\right)=+\infty$$

Таким образом, несобственный интеграл расходится.

б)

$$\int_0^{1/3}\frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x^2}dx=(*)$$

Подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв в точке $a=0$

$$(*)=-\int_0^{1/3}e^{3+\frac{1}{x}}d\left(3+\frac{1}{x}\right)=-\lim_{a\to 0+0}\left(e^{3+\frac{1}{x}}\right)\Bigg|_a^{1/3}=-\lim_{a\to 0+0}\left(e^6-e^{\overbrace{3+\frac{1}{a}}^{\to+\infty}}\right)=-(e^6-\infty)=+\infty$$

Несобственный интеграл расходится