ИДЗ-5.1.

Найти указанные пределы.

1.6.

$$\lim_{x\to 3}\frac{12+x-x^2}{x^3-27}=\frac{12+3-9}{27-27}=\frac{6}{0}=\infty$$

2.6.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x-1}{x^4-1}=\frac{2-3-1}{1-1}=\frac{-2}{0}=-\infty$$

3.6.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2+10x+3}{x^2}}{\frac{2x^2+5x-3}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{10}{x}^{\to 0}+\frac{3}{x^2}^{\to 0}}{2+\frac{5}{x}^{\to 0}-\frac{3}{x^2}^{\to 0}}=\frac{3}{2}=1{,}5$$

4.6.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+7x^2+4}{x^4+5x-1}=\frac{-\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^4

$$(*)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x^3+7x^2+4}{x^4}}{\frac{x^4+5x-1}{x^4}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2}{x}^{\to 0}+\frac{7}{x^2}^{\to 0}+\frac{4}{x^4}^{\to 0}}{1+\frac{5}{x^3}^{\to 0}-\frac{1}{x^4}^{\to 0}}=\frac{0}{1}=0$$

5.6.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2x+1}{3x^2+2x-5}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^4

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^4-2x+1}{x^4}}{\frac{3x^2+2x-5}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x^3}^{\to 0}+\frac{1}{x^4}^{\to 0}}{\frac{3}{x^2}^{\to 0}+\frac{2}{x^3}^{\to 0}-\frac{5}{x^4}^{\to 0}}=\frac{3}{0}=\infty$$

6.6.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}=\frac{0}{0}=(*)$$

Разложим числитель на множители:

$x^2-3x+2=0$

$D=9-8=1;\sqrt{D}=1$

$x_{1,2}=\frac{3\pm 1}{2}$

$x_1=1; x_2=2$

$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

Умножим числитель знаменатель на сопряженное знаменателю выражение

$$(*)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)(\overset{\to\sqrt{3}}{\sqrt{5-x}}+\overset{\to\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}})}{(\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1})(\sqrt{5-x}+\sqrt{x+1})}=2\sqrt{3}\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{5-x-x-1}=$$

$$=2\sqrt{3}\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{4-2x}=2\sqrt{3}\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{2(2-x)}=-\sqrt{3}\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)}=$$

$$=-\sqrt{3}\lim_{x\to 2}(x-1)=-\sqrt{3}\cdot(2-1)=-\sqrt{3}$$

7.6.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{-5x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{-\infty}=(*)$$

Используем второй замечательный предел: $\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}=e$

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{3\cdot(-5x)}{x}}=e^{-15}$$

8.6.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{3x-1}\right)^{2x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{-\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель основания на x

$$(*)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{3x-1}{x}}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1+\overset{\to 0}{\frac{1}{x}}}{3-\overset{\to 0}{\frac{1}{x}}}\right)^{2x+1}=\frac{1}{3^{-\infty}}=3^{\infty}=\infty$$

9.6.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{\sin 3x}=\frac{0}{0}=(*)$$

Используем первый замечательный предел: $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$

$$(*)=\lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot\arcsin 5x}{3x\cdot\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{3x}=\frac{0}{0}=(*)$$

Замена: $5x=\sin t;\arcsin x=\arcsin(\sin t)=t; x=\frac{\sin t}{5}$

Если $x\to 0$, то $t\to 0$

$$(*)=\lim_{t\to 0}\frac{t}{3\cdot\frac{\sin t}{5}}=\frac{5}{3}\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{\sin t}\right)^{\to 1}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$$

ИДЗ-5.2.

2.6. Найти предел, используя бесконечно малые эквивалентные функции.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{2x}=\frac{0}{0}=(*)$$

Заменим бесконечно малую эквивалентной: $\arcsin\alpha\cong\alpha$ при $\alpha\to 0$

$$(*)=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}=1{,}5$$

3.6. Исследовать функцию на непрерывность и построить ее график

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0\\ x^2, & 0<x\le 2\\ x+1, & x>2\end{cases}$$

Решение:

1) Исследуем на непрерывность точку $x=0$

$f(0)=-0=0$ – функция определена в данной точке.

Найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 0-0}f(x)=\lim_{x\to 0-0}(-x)=-0=0$$

$$\lim_{x\to 0+0}f(x)=\lim_{x\to 0+0}(x^2)=0^2=0$$

$\lim\limits_{x\to 0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)$ – общий предел существует.

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$ – предел функции в точке равен значению данной функции в данной точке.

Таким образом, рассматриваемая функция непрерывна в точке $x=0$ по определению.

2) Исследуем на непрерывность точку $x=2$

$f(2)=2^2=4$ – функция определена в данной точке.

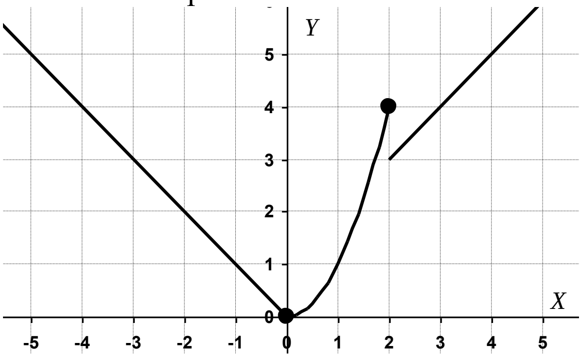
Найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0}\left(x^2\right) = 2^2 = 4$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0}\left(x+1\right) = 2+1 = 3$$

Односторонние пределы конечны и различны, значит данная функция терпит разрыв 1-го рода «со скачком» в точке $x = 2$

Выполним чертеж:



ИДЗ-6.1.

Продифференцировать данные функции

3.6. $y = \arccos^2 4x \cdot \ln(x-3)$

$$y' = \left(\arccos^2 4x \cdot \ln(x-3)\right)' = (\arccos^2 4x)' \cdot \ln(x-3) + \arccos^2 4x \cdot (\ln(x-3))' =$$

$$= 2\arccos 4x \cdot (\arccos 4x)' \cdot \ln(x-3) + \arccos^2 4x \cdot \frac{1}{(x-3)} \cdot (x-3)' =$$

$$= -\frac{2\arccos 4x \cdot \ln(x-3)\cdot(4x)'}{\sqrt{1-(4x)^2}} + \frac{\arccos^2 4x}{x-3}\cdot(1-0) =$$

$$= -\frac{8\arccos 4x \cdot \ln(x-3)}{\sqrt{1-16x^2}} + \frac{\arccos^2 4x}{x-3}$$

4.6. $y = 5^{-x^2} \cdot \arcsin 3x^3$

$$y = \left(5^{-x^2}\cdot\arcsin 3x^3\right)' = \left(5^{-x^2}\right)'\cdot\arcsin 3x^3 + 5^{-x^2}\cdot\left(\arcsin 3x^3\right)' =$$

$$= 5^{-x^2}\cdot\ln 5\cdot(-x^2)'\cdot\arcsin 3x^3 + 5^{-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(3x^3\right)^2}}\cdot(3x^3)' =$$

$$= -2x\ln 5\cdot 5^{-x^2}\cdot\arcsin 3x^3 + \frac{9x^2\cdot 5^{-x^2}}{\sqrt{1-9x^6}}$$

5.6. $y = \log_2(x-7)\cdot arctg\sqrt{x}$

$$y = \left(\log_2(x-7)\cdot arctg\sqrt{x}\right)' = (\log_2(x-7))'\cdot arctg\sqrt{x} + \log_2(x-7)\cdot(arctg\sqrt{x})' =$$

$$= \frac{1}{(x-7)\ln 2}\cdot(x-7)'\cdot arctg\sqrt{x} + \log_2(x-7)\cdot\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot(\sqrt{x})' =$$

$$= \frac{arctg\sqrt{x}}{(x-7)\ln 2} + \frac{\log_2(x-7)}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

6.6. $y = ch\frac{1}{x}\cdot arctg(7x+2)$

$$y' = \left(ch\frac{1}{x}\cdot arctg(7x+2)\right)' = \left(ch\frac{1}{x}\right)'\cdot arctg(7x+2) + ch\frac{1}{x}\cdot(arctg(7x+2))' =$$

$$= sh\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'\cdot arctg(7x+2) + ch\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+(7x+2)^2}(7x+2)' =$$

$$= -\frac{sh\frac{1}{x}\cdot arctg(7x+2)}{x^2} + \frac{7ch\frac{1}{x}}{1+(7x+2)^2}$$

7.6. $y = \frac{e^{tg3x}}{\sqrt{3x^2-x+4}}$

$$y' = \left(\frac{e^{tg3x}}{\sqrt{3x^2-x+4}}\right)' = \frac{(e^{tg3x})'\cdot\sqrt{3x^2-x+4} - e^{tg3x}\cdot(\sqrt{3x^2-x+4})'}{(\sqrt{3x^2-x+4})^2} =$$

$$= \frac{e^{tg3x}(tg3x)'\cdot\sqrt{3x^2-x+4} - e^{tg3x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3x^2-x+4}}\cdot(3x^2-x+4)'}{3x^2-x+4} =$$

$$= \frac{\frac{3e^{tg3x}\cdot\sqrt{3x^2-x+4}}{\cos^2 3x} - \frac{e^{tg3x}\cdot(6x-1)}{2\sqrt{3x^2-x+4}}}{3x^2-x+4}$$

8.6. $y = \frac{tg^3 2x}{\lg(5x+1)}$

$$y' = \left(\frac{tg^3 2x}{\lg(5x+1)}\right)' = \frac{(tg^3 2x)'\cdot\lg(5x+1) - tg^3 2x\cdot(\lg(5x+1))'}{(\lg(5x+1))^2} =$$

$$= \frac{3tg^2 2x\cdot(tg2x)'\cdot\lg(5x+1) - tg^3 2x\cdot\frac{1}{(5x+1)\ln 10}(5x+1)'}{\lg^2(5x+1)} =$$

$$= \frac{\frac{6tg^2 2x\cdot\lg(5x+1)}{\cos^2 2x} - \frac{5tg^3 2x}{(5x+1)\ln 10}}{\lg^2(5x+1)}$$

9.6. $y = \frac{th3x^5}{arctg^2 3x}$

$$y' = \left(\frac{th3x^5}{arctg^2 3x}\right)' = \frac{(th3x^5)'\cdot arctg^2 3x - th3x^5\cdot(arctg^2 3x)'}{(arctg^2 3x)^2} =$$

$$=\frac{\frac{1}{ch^2 3x^5}(3x^5)'\cdot arctg^2 3x - th3x^5\cdot 2arctg3x(arctg3x)'}{arctg^4 3x}=$$

$$=\frac{\frac{15x^4 arctg^2 3x}{ch^2 3x^5}-\frac{6th3x^5\cdot arctg3x}{1+9x^2}}{arctg^4 3x}$$

10.6. $y=\frac{2arctg(3x+2)}{(x-3)^2}$

$$y'=\left(\frac{2arctg(3x+2)}{(x-3)^2}\right)'=2\cdot\frac{(arctg(3x+2))'\cdot(x-3)^2-arctg(3x+2)\cdot((x-3)^2)'}{((x-3)^2)^2}=$$

$$=2\cdot\frac{\frac{1}{1+(3x+2)^2}\cdot(3x+2)'\cdot(x-3)^2-arctg(3x+2)\cdot 2(x-3)(x-3)'}{(x-3)^4}=$$

$$=2\cdot\frac{\left(\frac{3(x-3)^2}{1+(3x+2)^2}-2arctg(3x+2)\cdot(x-3)\right)}{(x-3)^4}$$

11.6. $y=\sqrt[7]{\frac{2x-3}{2x+1}}\cdot\lg(7x-10)$

Используем логарифмическую производную

$$\ln y=\ln\left(\sqrt[7]{\frac{2x-3}{2x+1}}\cdot\lg(7x-10)\right)$$

$$\ln y=\frac{1}{7}\ln\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)+\ln\lg(7x-10)$$

$$(\ln y)'=\left(\frac{1}{7}\ln(2x-3)-\frac{1}{7}\ln(2x+1)+\ln\lg(7x-10)\right)'$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\left(\frac{1}{7(2x-3)}\cdot(2x-3)'-\frac{1}{7(2x+1)}\cdot(2x+1)'+\frac{1}{\lg(7x-10)}\cdot(\lg(7x-10))'\right)$$

$$y'=\left(\frac{2}{7(2x-3)}-\frac{2}{7(2x+1)}+\frac{1}{\lg(7x-10)}\cdot\frac{1}{(7x-10)\ln 10}\cdot(7x-10)'\right)\cdot y=$$

$$=\left(\frac{2(2x+1-2x+3)}{7(2x-3)(2x+1)}+\frac{1}{(7x-10)\ln 10\cdot\lg(7x-10)}\cdot(7-0)\right)\cdot y=$$

$$=\left(\frac{8}{7(2x-3)(2x+1)}+\frac{7}{(7x-10)\ln 10\cdot\lg(7x-10)}\right)\cdot\sqrt[7]{\frac{2x-3}{2x+1}}\cdot\lg(7x-10)$$

12.6. $y=(\cos 5x)^{arctg\sqrt{x}}$

Используем логарифмическую производную

$$\ln y=arctg\sqrt{x}\cdot\ln\cos 5x$$

$$(\ln y)'=\left(arctg\sqrt{x}\cdot\ln\cos 5x\right)'$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=(arctg\sqrt{x})'\cdot\ln\cos 5x+arctg\sqrt{x}\cdot(\ln\cos 5x)'$$

$$y'=\left(\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot(\sqrt{x})'\cdot\ln\cos 5x+arctg\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\cos 5x}\cdot(\cos 5x)'\right)\cdot y=$$

$$=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}\cdot\ln\cos 5x+arctg\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\cos 5x}\cdot(-5\sin 5x)\right)\cdot y=$$

$$=\left(\frac{\ln\cos 5x}{2\sqrt{x}(1+x)}-5tg5x\cdot arctg\sqrt{x}\right)\cdot(\cos 5x)^{arctg\sqrt{x}}$$

13.6. $y=(tg(4x-3))^{\arccos 2x}$

Используем логарифмическую производную

$$\ln y=\arccos 2x\cdot\ln tg(4x-3)$$

$$(\ln y)'=(\arccos 2x\cdot\ln tg(4x-3))'$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=(\arccos 2x)'\cdot\ln tg(4x-3)+\arccos 2x\cdot(\ln tg(4x-3))'$$

$$y'=\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\cdot(2x)'\cdot\ln tg(4x-3)+\arccos 2x\cdot\frac{1}{tg(4x-3)}\cdot(tg(4x-3))'\right)\cdot y=$$

$$=\left(-\frac{2\ln tg(4x-3)}{\sqrt{1-4x^2}}+\frac{4\arccos 2x}{tg(4x-3)\cdot\cos^2(4x-3)}\right)\cdot(tg(4x-3))^{\arccos 2x}$$

14.6. $y=\dfrac{(x-1)^4(x+2)^5}{\sqrt[3]{(x-4)^2}}$

Используем логарифмическую производную

$$\ln y=\ln\left(\frac{(x-1)^4(x+2)^5}{\sqrt[3]{(x-4)^2}}\right)$$

$$\ln y=4\ln(x-1)+5\ln(x+2)-\frac{2}{3}\ln(x-4)$$

$$(\ln y)'=\left(4\ln(x-1)+5\ln(x+2)-\frac{2}{3}\ln(x-4)\right)'$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\left(\frac{4}{x-1}(x-1)'+\frac{5}{x+2}(x+2)'-\frac{2}{3(x-4)}\cdot(x-4)'\right)$$

$$y'=\left(\frac{4}{x-1}+\frac{5}{x+2}-\frac{2}{3(x-4)}\right)\cdot\frac{(x-1)^4(x+2)^5}{\sqrt[3]{(x-4)^2}}$$

ИДЗ-6.2.

1.6. Найти y' и y''

$$arcctgy=4x+5y$$

$$(arcctgy)'=(4x+5y)'$$

$$-\frac{1}{(1+y^2)}\cdot y'=4+5y'$$
$$-y'=4(1+y^2)+5(1+y^2)y'$$
$$(5+5y^2)y'+y'=-4(1+y^2)$$
$$y'=-4\cdot\frac{(1+y^2)}{(6+5y^2)}$$

$$y''=-4\cdot\left(\frac{(1+y^2)}{(6+5y^2)}\right)'=-4\cdot\frac{(1+y^2)'\cdot(6+5y^2)-(1+y^2)\cdot(6+5y^2)'}{(6+5y^2)^2}=$$
$$=-4\cdot\frac{2yy'\cdot(6+5y^2)-(1+y^2)\cdot 10yy'}{(6+5y^2)^2}=\frac{8yy'(-6-5y^2+5+5y^2)}{(6+5y^2)^2}=-\frac{8yy'}{(6+5y^2)^2}$$

2.6. Найти y' и y''

$$\begin{cases} x=\sqrt{t} \\ y=\sqrt[5]{t} \end{cases}$$

Используем формулы: $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$, $y''_{xx}=\dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}$

$$y'_t=(\sqrt[5]{t})'=\left(t^{\frac{1}{5}}\right)'=\frac{1}{5}t^{-\frac{4}{5}}=\frac{1}{5\cdot\sqrt[5]{t^4}}$$
$$x'_t=\left(\sqrt{t}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{t}}$$
$$y'_x=\frac{2\sqrt{t}}{5\cdot\sqrt[5]{t^4}}=\frac{2}{5}\cdot t^{\frac{1}{2}-\frac{4}{5}}=\frac{2}{5}\cdot t^{-\frac{3}{10}}$$

$$(y'_x)'=\frac{2}{5}\cdot\left(t^{-\frac{3}{10}}\right)'=\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{3}{10}\right)\cdot t^{-\frac{13}{10}}=-\frac{3}{25\cdot\sqrt[10]{t^{13}}}$$
$$y''_{xx}=-\frac{3\cdot 2\sqrt{t}}{25\cdot\sqrt[10]{t^{13}}}=-\frac{6}{25\cdot\sqrt[5]{t^4}}$$

3.6. Для данной функции $y=e^{-x}\cos x$ и аргумента $x_0=0$ вычислить $y'''(0)$

Найдем производную третьего порядка. Используем формулу Лейбница:
$y'''=(uv)'''=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv'''$

$u=e^{-x}$	$v=\cos x$
$u'=-e^{-x}$	$v'=-\sin x$
$u''=e^{-x}$	$v''=-\cos x$
$u'''=-e^{-x}$	$v'''=\sin x$

$$y'''=-e^{-x}\cdot\cos x+3e^{-x}\cdot(-\sin x)+3\cdot(-e^{-x})\cdot(-\cos x)+e^{-x}\cdot\sin x$$
$$y'''(0)=-1-0+3+0=2$$

4.6. Записать формулу для производной n-го порядка функции $y=\dfrac{1}{x+5}$

$$y'=-\frac{1}{(x+5)^2}$$

$$y''=\frac{1\cdot 2}{(x+5)^3}$$

$$y'''=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(x+5)^4}$$

$$y^{(4)}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(x+5)^5}$$

…

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x+5)^{n+1}}$$

5.6. Записать уравнение нормали к кривой $y=f(x)=x^3-5x^2+7x-2$ в точке $(1;1)$

Уравнение нормали составим по формуле:

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

В данном случае: $x_0=1$, $f(x_0)=1$

$$f'(x)=\left(x^3-5x^2+7x-2\right)'=3x^2-10x+7$$

$$f'(x_0)=f'(1)=3-10+7=0$$

Таким образом:

$$y-1=-\frac{1}{0}(x-1)$$

$x-1=0$ – искомое уравнение

ИДЗ-6.3.

Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя:

1.6.

$$\lim_{x\to\infty}(\pi-2arctgx)\ln x=0\cdot\infty=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi-2arctgx}{\dfrac{1}{\ln x}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\pi-2arctgx)'}{\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{0-\dfrac{2}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x\ln^2 x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x\ln^2 x}{1+x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x\ln^2 x)'}{(1+x^2)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln^2 x+2x\cdot 2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x+2\ln x}{x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln^2 x+2\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2\ln x}{x}+\dfrac{2}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x+2}{x}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2\ln x+2)'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0$$

2.6.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{ax}-e^{bx})'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{ae^{ax}-be^{bx}}{\cos x}=\frac{a-b}{1}=a-b$$

3.6.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1-x)+tg\frac{\pi x}{2}}{ctg\pi x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\ln(1-x)+tg\frac{\pi x}{2}\right)'}{(ctg\pi x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{(1-x)}(1-x)'+\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{2}}\left(\frac{\pi x}{2}\right)'}{-\frac{1}{\sin^2\pi x}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{(1-x)}+\frac{\pi}{2\cos^2\frac{\pi x}{2}}}{-\frac{\pi}{\sin^2\pi x}}=\frac{1}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2\pi x}{1-x}-\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2\pi x}{\cos^2\frac{\pi x}{2}}=\frac{0}{0}-\frac{0}{0}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{(\sin^2\pi x)'}{(1-x)'}-\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{(\sin^2\pi x)'}{\left(\cos^2\frac{\pi x}{2}\right)'}=\frac{1}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{2\pi\sin\pi x\cos\pi x}{-1}-\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{2\pi\sin\pi x\cos\pi x}{-\frac{\pi}{2}\cdot 2\cos\frac{\pi x}{2}\sin\frac{\pi x}{2}}=$$

$$=-2\lim_{x\to 1}(\sin\pi x^{\to 0}\cdot\cos\pi x^{\to -1})+\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x\cdot\cos\pi x^{\to -1}}{\cos\frac{\pi x}{2}\cdot\sin\frac{\pi x}{2}^{\to 1}}=-2\cdot 0\cdot(-1)+\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{\cos\frac{\pi x}{2}}=$$

$$=0+\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sin\pi x)'}{\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\pi\cos\pi x}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2}}=-2\lim_{x\to 1}\frac{\cos\pi x^{\to -1}}{\sin\frac{\pi x}{2}^{\to 1}}=2$$

4.6.

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{tg^2 x}}=1^\infty=(*)$$

Используем основное логарифмическое тождество: $a=e^{\ln a}$

$$(*)=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)}{tg^2 x}}=(*)$$

Найдем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)}{tg^2 x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(1+\sin^2 x))'}{(tg^2 x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+\sin^2 x^{\to 0})}\cdot 2\sin x\cos x}{\frac{2tgx}{\cos^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos x}{\frac{\sin x}{\cos^3 x}}=\lim_{x\to 0}\cos^4 x=1^4=1$$

$$(*)=e^{1}=e$$

ИДЗ-6.4.

Провести полное исследование функций и построить их графики

2.6. $y = f(x) = \dfrac{x^2}{4x^2-1} = \dfrac{x^2}{(2x-1)(2x+1)}$

1) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой кроме точек $x = \pm\dfrac{1}{2}$, область определения: $D(f) = \Re \setminus \left\{\pm\dfrac{1}{2}\right\}$.

$f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{4(-x)^2-1} = \dfrac{x^2}{4x^2-1} = f(x)$, значит, данная функция является четной, ее график симметричен относительно оси OY.

Функция непериодическая.

2) Асимптоты.

$$\lim_{x\to 1/2-0} f(x) = \lim_{x\to 1/2-0}\left(\frac{x^2}{4x^2-1}\right) = \frac{\frac{1}{4}}{-0} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1/2+0} f(x) = \lim_{x\to 1/2+0}\left(\frac{x^2}{4x^2-1}\right) = \frac{\frac{1}{4}}{+0} = +\infty.$$

Прямые $x = \dfrac{1}{2}$ и $x = -\dfrac{1}{2}$ являются вертикальными асимптотами для графика $f(x)$ при $x \to \dfrac{1}{2}$ и $x \to -\dfrac{1}{2}$ соответственно.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x(4x^2-1)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{(4x^2-1)} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{(4x^2-1)}{x^2}} =$$

,

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\overset{\to 0}{\frac{1}{x}}}{4-\underset{}{\overset{\to 0}{\frac{1}{x^2}}}} = \frac{0}{4} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{4x^2-1} - 0\cdot x\right) = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{4x^2-1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{4-\overset{\to 0}{\frac{1}{x^2}}}\right) = \frac{1}{4} = 0$$

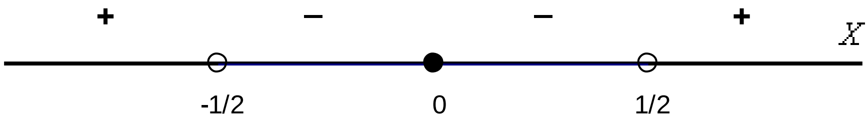
.

Прямая $y = \dfrac{1}{4}$ является горизонтальной асимптотой для графика $f(x)$ при $x \to \pm\infty$.

3) Точки пересечения графика с координатными осями, интервалы знакопостоянства функции.

График $f(x)$ проходит через начало координат, $x \neq \pm\frac{1}{2}$

Определим знаки $f(x)$:



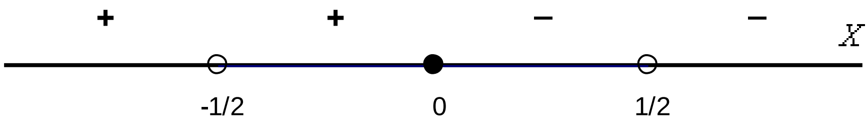
$f(x) > 0$ при $x \in (-\infty;-1/2) \cup (1/2;+\infty)$,
$f(x) < 0$ при $x \in (-1/2;0) \cup (0;1/2)$

4) Возрастание, убывание, экстремумы функции.

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{4x^2-1}\right)' = \frac{(x^2)'(4x^2-1) - x^2(4x^2-1)'}{(4x^2-1)^2} = \frac{2x(4x^2-1) - x^2 \cdot 8x}{(4x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{2x(4x^2-1-4x^2)}{(4x^2-1)^2} = -\frac{2x}{(4x^2-1)^2} = 0$$

$x = 0$ – критическая точка.
Определим знаки $f'(x)$:



$f(x)$ возрастает на $(-\infty;-1/2) \cup (-1/2;0)$ и убывает на $(0;1/2) \cup (1/2;+\infty)$.
В точке $x = 0$ функция достигает максимума: $f(0) = 0$

5) Выпуклость, вогнутость, перегибы графика.

$$f''(x) = -2 \cdot \left(\frac{x}{(4x^2-1)^2}\right)' = -2 \cdot \frac{(x)'\left((4x^2-1)^2\right) - x\left((4x^2-1)^2\right)'}{(4x^2-1)^4} =$$

$$= -2 \cdot \frac{(4x^2-1)^2 - x \cdot 2(4x^2-1) \cdot 8x}{(4x^2-1)^4} = -2 \cdot \frac{(4x^2-1) - 16x^2}{(4x^2-1)^3} = \frac{2(1+12x^2)}{(4x^2-1)^3}$$

Определим знаки $f''(x)$:

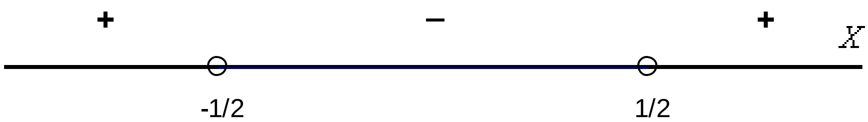
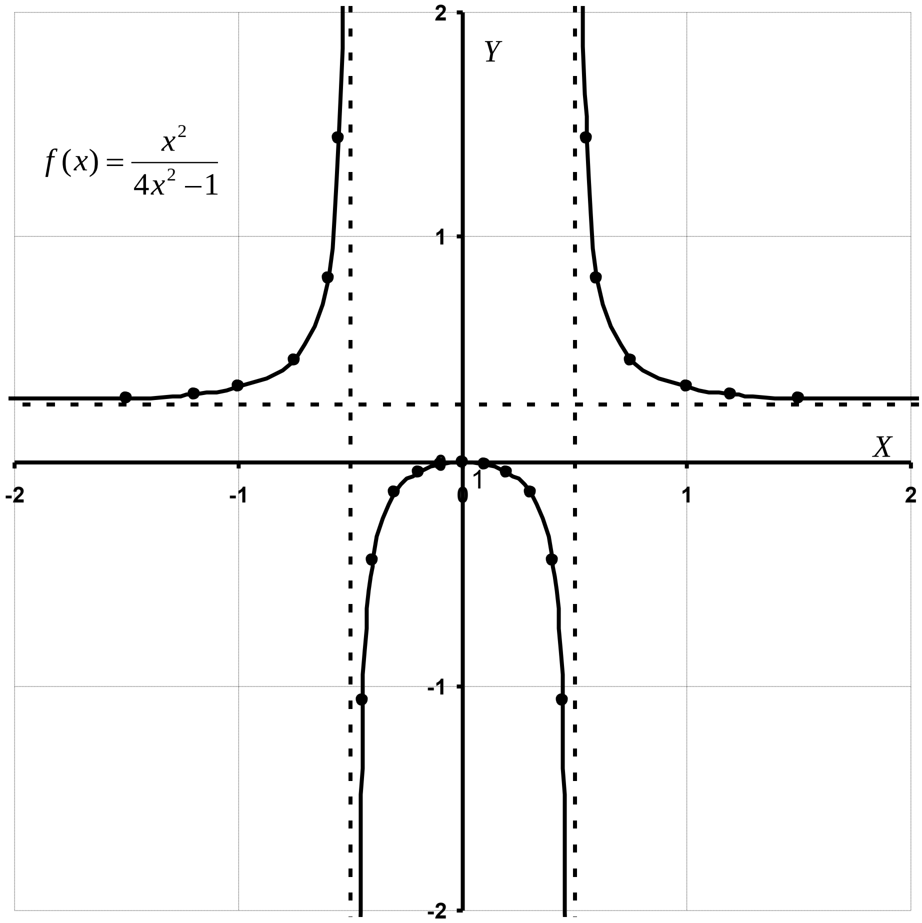


График функции является выпуклым на $(-1/2;1/2)$ и вогнутым на $(-\infty;-1/2) \cup (1/2;+\infty)$.

6) Найдем дополнительные точки и построим график:

x	0,2	0,4	0,45	0,49	0,53	0,55	0,6	0,75	1	1,2	1,5
y	-0,05	-0,44	-1,07	-6,06	2,27	1,44	0,82	0,45	0,33	0,30	0,28



3.6. $y=f(x)=x^2e^{-\frac{x^2}{2}}$

1) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, область определения: $D(f)=\Re$.

$f(-x)=(-x)^2e^{-\frac{(-x)^2}{2}}=x^2e^{-\frac{x^2}{2}}=f(x)$, значит, данная функция является четной, ее график симметричен относительно оси OY.

Функция непериодическая.

2) Асимптоты.

Так как функция непрерывна на $\Re$, то, очевидно, что вертикальные асимптоты отсутствуют

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^2e^{-\frac{x^2}{2}}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{e^{\frac{x^2}{2}}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x^2)'}{\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)'}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{e^{\frac{x^2}{2}}\cdot x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{e^{\frac{x^2}{2}}}=0$$

Прямая $y=0$ (ось OX) является горизонтальной асимптотой для графика $f(x)$ при $x\to\pm\infty$.

3) Точки пересечения графика с координатными осями, интервалы знакопостоянства функции.

График $f(x)$ проходит через начало координат.

$f(x)=x^2e^{-\frac{x^2}{2}}\geq 0$ на всей области определения.

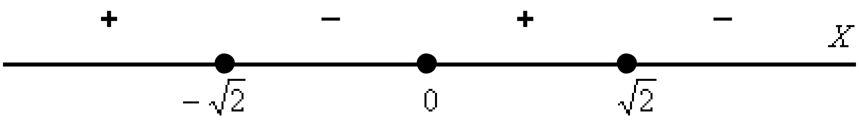
4) Возрастание, убывание, экстремумы функции.

$$f'(x)=\left(x^2e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'=\left(x^2\right)'\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}+x^2\cdot\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'=2xe^{-\frac{x^2}{2}}+x^2\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\left(-\frac{x^2}{2}\right)'=$$

$$=e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(2x+x^2\cdot(-x))=e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot x(2-x^2)$$

$x=0$, $x=\pm\sqrt{2}$ – критические точки.

Определим знаки $f'(x)$:



$f(x)$ возрастает на $(-\infty;-\sqrt{2})\cup(0;\sqrt{2})$ и убывает на $(-\sqrt{2};0)\cup(\sqrt{2};+\infty)$.

В точке $x=0$ функция достигает минимума: $f(0)=0$

В точках $x=\pm\sqrt{2}$ функция достигает максимумов: $f\left(\pm\sqrt{2}\right)=2e^{-1}\approx 0{,}736$

Область значений функции: $E(f)=\left[0;2e^{-1}\right]$

5) Выпуклость, вогнутость, перегибы графика.

$$f''(x)=\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(2x-x^3)\right)'=\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'\cdot(2x-x^3)+e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(2x-x^3)'=$$

$$=-xe^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(2x-x^3)+e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(2-3x^2)=e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\left(-2x^2+x^4+2-3x^2\right)=$$

$$=e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\left(x^4-5x^2+2\right)=0$$

Замена: $x^2=t$

$t^2-5t+2=0$

$D=25-8=17$

$$t_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$$

Критические точки:

$$x^2=t_1=\frac{5+\sqrt{17}}{2}\Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{2}}\approx\pm 2{,}136$$

$$x^2=t_2=\frac{5-\sqrt{17}}{2}\Rightarrow x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{2}}\approx\pm 0{,}66$$

Определим знаки $f''(x)$:

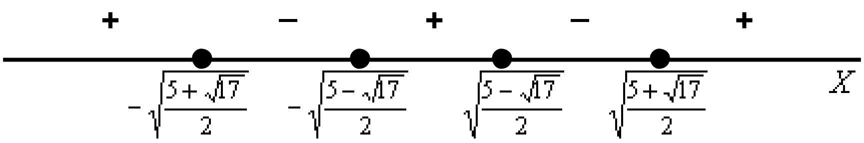


График функции является выпуклым на

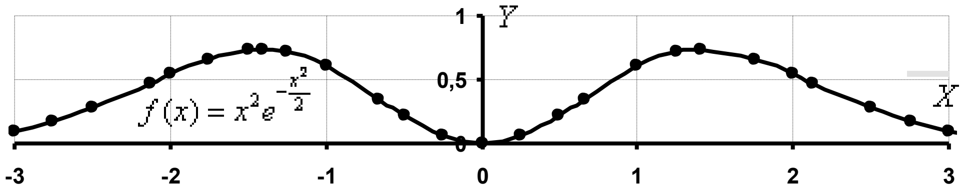
$$\left(-\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{2}};-\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{2}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{2}};-\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{2}}\right)$$ и вогнутым на

$$\left(-\infty;-\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{2}}\right)\cup\left(-\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{2}};\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{2}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{2}};+\infty\right).$$

Во всех критических точках существуют перегибы графика:

$$f\left(\pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{2}}\right)\approx 0{,}47,\ f\left(\pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{2}}\right)\approx 0{,}35$$

6) Построим график:



4.6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-x+1}$ на отрезке $[-1;1]$.

Решение: 1) Найдем значения функции в критических точках, принадлежащих данному отрезку:

$$f'(x)=\left(\frac{x^3}{x^2-x+1}\right)'=\frac{(x^3)'\cdot(x^2-x+1)-x^3\cdot(x^2-x+1)'}{(x^2-x+1)^2}=$$

$$=\frac{3x^2\cdot(x^2-x+1)-x^3\cdot(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}=\frac{x^2\cdot(3(x^2-x+1)-x(2x-1))}{(x^2-x+1)^2}=$$

$$=\frac{x^2\cdot(3x^2-3x+3-2x^2+x))}{(x^2-x+1)^2}=\frac{x^2\cdot(x^2-2x+3)}{(x^2-x+1)^2}=0$$

$x^2-2x+3=0$

$D=4-12=-8<0\Rightarrow x^2-2x+3>0$

$x=0$ – критическая точка

$$f(0)=\frac{0}{0-0+1}=0$$

2) Вычислим значения функции на концах отрезка

$$f(-1)=\frac{-1}{1+1+1}=-\frac{1}{3},\ f(1)=\frac{1}{1-1+1}=1$$

Ответ: $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=f(1)=1$, $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=f(-1)=-\dfrac{1}{3}$