ИДЗ 12.1.

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму.

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

Решение: Разложим общий член ряда в сумму дробей:

$$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+2}$$

$$A(n+2)+Bn=1$$

$$\begin{cases}A+B=0\\ 2A=1\end{cases}\Rightarrow A=\frac{1}{2};B=-\frac{1}{2}$$

Таким образом:

$$a_n=\frac{\frac{1}{2}}{n}-\frac{\frac{1}{2}}{n+2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

Запишем частичную сумму ряда:

$$S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

Сумма ряда:

$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\overset{\to 0}{\frac{1}{n+1}}-\overset{\to 0}{\frac{1}{n+2}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$ – конечное число, значит, исследуемый ряд сходится.

Ответ: ряд сходится, сумма ряда $S=\frac{3}{4}$

2. Исследовать на сходимость указанные ряды с положительными членами

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+2)!}{n^5}$

Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{3^{n+1}(n+3)!}{(n+1)^5}}{\frac{3^n(n+2)!}{n^5}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^5\cdot3\cdot3^n\cdot1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n(n+1)(n+2)(n+3)}{(n+1)^5\cdot3^n\cdot1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n(n+1)(n+2)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^5\cdot3\cdot(n+3)}{(n+1)^5}\right)=3\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(n+3)^{\to\infty}}{\left(1+\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}\right)^5}\right)=\infty>1$$

Таким образом, исследуемый ряд **расходится.**

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{10^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{10^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{+\infty}{e} = +\infty \neq 0$$

Исследуемый ряд **расходится,** так как не выполнен необходимый признак сходимости ряда.

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{4n^2+1}\right)^2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{4n^2+1}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2+4n+1}{16n^4+8n^2+1}$$

Сравним данный ряд со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Используем предельный признак сравнения.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\frac{4n^2+4n+1}{16n^4+8n^2+1}}{\frac{1}{n^2}} \right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(4n^2+4n+1\right)}{16n^4+8n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4n^4+4n^3+n^2}{16n^4+8n^2+1} = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{4n^4+4n^3+n^2}{n^4}}{\frac{16n^4+8n^2+1}{n^4}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4+\overset{\to 0}{\frac{4}{n}}+\overset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}}{16+\overset{\to 0}{\frac{8}{n^2}}+\overset{\to 0}{\frac{1}{n^4}}} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

Получено конечное число, отличное от нуля, значит, исследуемый ряд **сходится** вместе с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

5.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$

Сравним данный ряд со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$.

$\sqrt{n^3+2} > \sqrt{n^3} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^3+2}} < \frac{1}{\sqrt{n^3}}$, значит, по соответствующему признаку сравнения исследуемый ряд **сходится** вместе с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$.

6.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3}$

Сравним данный ряд со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Используем предельный признак сравнения.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{n}{(n+1)^3}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3+3n^2+3n+1}{n^3}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}^{\to 0}+\frac{3}{n^2}^{\to 0}+\frac{1}{n^3}^{\to 0}\right)=1$$

Получено конечное число, отличное от нуля, значит, исследуемый ряд **сходится** вместе с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость знакочередующиеся ряды.

7.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 3^n}$

Используем признак Лейбница.
Данный ряд является знакочередующимся.

$\lim_{n\to+\infty}|a_n|=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}=0$ – члены ряда убывают по модулю.

Ряд сходится по признаку Лейбница.
Исследуем ряд на абсолютную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}$$

Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{(n+2)\cdot 3^{n+1}}}{\frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n\cdot(n+1)}{3\cdot 3^n\cdot(n+2)}=\frac{1}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n}^{\to 0}}{1+\frac{2}{n}^{\to 0}}=\frac{1}{3}<1$$

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится.

Исследуемый ряд **сходится абсолютно.**

ИДЗ 12.2.

Найти область сходимости ряда

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{n^2+1}$

Решение: Найдем интервал сходимости данного ряда. Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{2^{n+1}\cdot x^{n+1}}{(n+1)^2+1}}{\frac{2^n\cdot x^n}{n^2+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x\cdot x^n\cdot 2\cdot 2^n\left(n^2+2n+2\right)}{x^n\cdot 2^n\left(n^2+1\right)}\right| =$$

$$= 2|x|\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+2n+2}{n^2+1} = 2|x|\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n^2+2n+2}{n^2}}{\frac{n^2+1}{n^2}} = 2|x+3|\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\overset{\to 0}{\frac{2}{n}}+\overset{\to 0}{\frac{2}{n^2}}}{1+\underset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}} = 2|x|$$

Ряд сходится при $2|x|<1$

$|x|<\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ – интервал сходимости исследуемого степенного ряда.

Исследуем сходимость ряда на концах найденного интервала.

1) При $x=-\frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$ (*)

Используем признак Лейбница.

Ряд является знакочередующимся.

$\lim_{n\to+\infty}|a_n| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2+1}=0$ – члены ряда не убывают по модулю.

Ряд сходится по признаку Лейбница.

Исследуем ряд на абсолютную сходимость:

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$

Используем интегральный признак.

$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=(*)$

Подынтегральная функция непрерывна на $[1;+\infty)$.

$(*)=\lim_{b\to+\infty}\left(arctgx\right)\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(arctgb_{\to\pi/2}-arctg1\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится вместе с соответствующим несобственным интегралом. Ряд (*) сходится абсолютно.

2) При $x=\frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ – расходится.

Ответ: Область сходимости исследуемого ряда: $-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}$

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{2n-1}}{(2n-1)}$

Решение: Найдем интервал сходимости данного ряда. Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(x-4)^{2(n+1)-1}}{(2(n+1)-1)}}{\frac{(x-4)^{2n-1}}{(2n-1)}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x-4)^{2n+1}\cdot(2n+1)}{(x-4)^{2n-1}\cdot(2n-1)}\right|=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x-4)^{2n-1}\cdot(x-4)^2(2n+1)}{(x-4)^{2n-1}\cdot(2n-1)}\right|=(x-4)^2\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(2n+1)}{n}}{\frac{(2n-1)}{n}}=(x-4)^2\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{n}^{\to 0}}{2-\frac{1}{n}^{\to 0}}=(x-4)^2$$

Ряд сходится при $(x-4)^2<1$

$|x-4|<1$

$-1<x-4<1$

$3<x<5$ – интервал сходимости исследуемого степенного ряда.

Исследуем сходимость ряда на концах найденного интервала.

1) При $x=3\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{(2n-1)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}$

Сравним данный ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Используем предельный признак сравнения.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{(2n-1)}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n-1}{n}=\lim_{n\to+\infty}\left(2-\frac{1}{n}^{\to 0}\right)=2$$

Получено конечное число, отличное от нуля, значит, полученный числовой ряд **расходится** вместе с гармоническим рядом.

2) При $x=5\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}$ – расходится

Ответ: Область сходимости исследуемого степенного ряда: $3<x<5$

4. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)$. Указать область сходимости полученного ряда к этой функции.

4.1. $f(x)=\cos 5x$

Используем разложение: $\cos\alpha=1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}-\frac{\alpha^6}{6!}+\ldots$. Данный ряд сходится при любом значении α. В данном случае $\alpha=2x$

$\cos 5x=1-\frac{5^2x^2}{2!}+\frac{5^4x^4}{4!}-\frac{5^6\cdot x^6}{6!}+\ldots$, область сходимости ряда: $x\in(-\infty;\infty)$.