Горячие формулы школьного курса математики

Для успешного освоения высшей математики необходимо вспомнить следующее:

I) Модуль (абсолютное значение) числа

Грубо говоря, это число без учёта знака. Модуль «уничтожает» возможный знак «минуса»: $|4|=4$, $|-4|=4$, $|0|=0$, $\left|\frac{10}{3}\right|=\frac{10}{3}$, $|-2{,}5|=2{,}5$ и т. д.

Таким образом, модуль произвольного числа x всегда неотрицателен: $|x|\geq 0$.

Согласно школьному определению, модуль числа – это **расстояние** (а оно не может быть отрицательным) от соответствующей точки числовой прямой до начала координат. Из чего следует, что модули противоположных чисел равны, например: $|-4|=|4|=4$. Действительно, числа –4 и 4 равноудалены от нуля.

Уравнение $|x|=\alpha$ имеет два корня: $x_1=-\alpha,\quad x_2=\alpha$ (если $\alpha=0$, то корень один).

Неравенство $|x|<\alpha$ раскрывается через двойное неравенство $-\alpha<x<\alpha$.

Неравенство $|x|>\alpha$ раскрывается через *совокупность* неравенств $\left[\begin{array}{l} x<-\alpha \\ x>\alpha \end{array}\right.$, то есть «икс» **либо** меньше $-\alpha$, **либо** больше α.

Аналогичные выкладки справедливы и для нестрогих неравенств $|x|\leq\alpha,\quad |x|\geq\alpha$.

II) Формулы сокращенного умножения

1) Разность квадратов
$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

2) Квадрат суммы и квадрат разности
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

3) Сумма и разность кубов:
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

4) Куб суммы и разности
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

Данные формулы очень часто используются в ходе решения пределов, преобразований подынтегральных выражений, действий с комплексными числами.

Формулы № 1-2 желательно знать наизусть и сразу ВИДЕТЬ возможность их применения.

III) Решение квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$**,** $a \neq 0$

Без него далеко не уедешь. Вспоминаем, как решать.

Находим дискриминант:
$D = b^2 - 4ac$

1) Если $D > 0$, то уравнение имеет два действительных корня:
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ – обычно их располагают в порядке возрастания.

2) Если $D = 0$, то уравнение имеет два совпавших действительных корня:
$x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$

3) Если $D < 0$, то уравнение имеет два сопряженных комплексных корня.
Подробная информация в статье «Комплексные числа для чайников»:
http://mathprofi.ru/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov.html

Практическим критерием правильности вычислений является тот факт, что у вас получился «хороший» дискриминант с извлечением корня нацело, например: $D = 16$ и $\sqrt{D} = \sqrt{16} = 4$, а вот $D = 17$ – не есть здОрово – скорее всего, вы допустили ошибку, либо в условии задачи опечатка. Хотя, может так оно и должно быть.

Справедливо следующее разложение квадратного трехчлена на множители:
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Решение квадратного уравнения – одно из самых распространённых действий в ходе выполнения различных задач высшей математики.

IV) Упрощение многоэтажных дробей

Правила сформулированы для чисел, но, разумеется, справедливы и для сложных выражений:

1) Дробь $\dfrac{a}{b}$ делится на число c: $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{b \cdot c}$	2) Число a делится на дробь $\dfrac{b}{c}$: $\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = \dfrac{a \cdot c}{b}$
3) Дробь $\dfrac{a}{b}$ делится на дробь $\dfrac{c}{d}$: $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a \cdot d}{b \cdot c}$	Все три правила применимы и справа налево, то есть из двухэтажной дроби можно искусственно сделать трёх- или четырёхэтажную дробь

V) Действия со степенями

В качестве основания степени возьмём всеми любимую букву x *(вместо неё можно рассмотреть другую букву или сложное выражение)*. Надеюсь, что вы помните:

$$\frac{1}{x^a}=x^{-a}$$

$x^a\cdot x^b=x^{a+b}$, в частности: $\frac{x^a}{x^b}=x^a\cdot x^{-b}=x^{a-b}$

$$(x^a)^b=x^{a\cdot b}$$

Разумеется, формулы работают и в обратном порядке (справа налево).

Очень важно знать: $\sqrt[b]{x^a}=x^{\frac{a}{b}}$, собственно, это не действие и не правило, а просто две записи ОДНОГО И ТОГО ЖЕ. **В таком виде (правая часть) часто записываются радикалы (корни) в процессе нахождения производных, интегралов и т. д.**

Пример: $\frac{1}{\sqrt[7]{(x+\cos 3x)^4}}=\frac{1}{(x+\cos 3x)^{\frac{4}{7}}}=(x+\cos 3x)^{-\frac{4}{7}}$

Все три выражения – это **одно и то же**, просто запись разная.

VI) Немного о логарифмах

Основное логарифмическое тождество $(a>0,\, a\neq 1,\, b>0)$:

$b=a^{\log_a b}$, в частности: $b=e^{\ln b}$

Некоторые **важные свойства** *(на примере натурального логарифма)*. Если $a>0, b>0$, то справедливо следующее (и слева направо, и справа налево):

$$\ln(ab)=\ln a+\ln b$$

$$\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$$

$\ln a^k=k\ln a$, где k – любое действительное число.

Несмотря на условие $a>0, b>0$, эти свойства можно применять при нахождении производных (с определённой тонкостью). Кроме того, есть обобщенные формулы для произвольных «а» и «б», они часто используются в ходе решения дифф. уравнений:

$$\ln|a|+\ln|b|=\ln|ab|$$

$$\ln|a|-\ln|b|=\ln\left|\frac{a}{b}\right|$$

Если a может принимать отрицательные значения, а k - *чётное* число, то*:*

$\ln a^k=k\ln|a|$; если k равно иному значению, то модуль не нужен:

$$\ln a^k=k\ln a$$