В каком виде искать частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами $y''+py'+qy=f(x)$?

После долгих раздумий я принял решение создать отдельную справочную таблицу для подбора частного решения неоднородного ДУ. В методический материал сведены практически все типовые ситуации, которые могут встретиться на практике, кроме того, приведены случаи подбора частного решения для уравнений повышенной сложности.

Как всегда объяснения ведутся на конкретных примерах с минимумом формул и параметров. **Обязательно прочитайте выводы на последней странице!!!**

I. Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня, отличных от нуля

Пример: рассмотрим неоднородное уравнение $y''+y'-2y=f(x)$.
Для соответствующего однородного уравнения $y''+y'-2y=0$ составим характеристическое уравнение $\lambda^2+\lambda-2=0$ и найдём его корни: $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=1$.

Итак, получены различные действительные корни, среди которых нет нуля.

Правая часть $f(x)$	**В каком виде нужно искать частное решение** $\tilde{y}$ **неоднородного уравнения?**
1. $f(x)=4$ (или другая ненулевая константа)	$\tilde{y}=A$
2. $f(x)=3x-1$	$\tilde{y}=Ax+B$
3. $f(x)=x^2-x$	$\tilde{y}=Ax^2+Bx+C$
4. $f(x)=4x^3+3x^2+1$	$\tilde{y}=Ax^3+Bx^2+Cx+D$
Примечание: обратите внимание, что когда в правой части $f(x)$ находится неполный многочлен, то частное решение подбирается без пропусков степеней, пример: $f(x)=-5x$. Это многочлен первой степени, и в нём отсутствует константа. Однако при подборе частного решения константу пропускать нельзя, то есть частное решение следует искать в виде $\tilde{y}=Ax+B$.	
5. $f(x)=2e^{3x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{\boxed{3}x}$ не совпадает с корнем характеристического уравнения $\lambda_1=-2$ или $\lambda_2=1$ Подбор выполняем очевидным образом: $\tilde{y}=Ae^{3x}$
6. $f(x)=(2x-3)e^{-x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{\boxed{-1}\cdot x}$ не совпадает с корнем характеристического уравнения $\lambda_1=-2$ или $\lambda_2=1$ Подбор выполняем очевидным образом: $\tilde{y}=(Ax+B)e^{-x}$
7. $f(x)=\frac{x}{2}e^{-2x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{\boxed{-2}x}$ **совпал** с корнем характеристического уравнения $\lambda_1=-2$. В подобной ситуации «штатный» подбор $\tilde{y}=(Ax+B)e^{-2x}$ нужно домножить на «икс»: $\tilde{y}=x(Ax+B)e^{-2x}$, то есть искать частное решение в виде: $\tilde{y}=(Ax^2+Bx)e^{-2x}$

<table>
<tr><td>8. $f(x)=e^x$</td><td>Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{\boxed{1}\cdot x}$ совпал с корнем характеристического уравнения $\lambda_2=1$. Аналогично: «штатный» подбор $\tilde{y}=Ae^x$ домножаем на «икс»: $\tilde{y}=x\cdot Ae^x$, то есть ищем частное решение в виде:
$\tilde{y}=Axe^x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Примечание: обратите внимание, что опять же в случае неполных многочленов <u>степени не теряются</u>, например, если $f(x)=7x^2e^{5x}$ (в многочлене отсутствует «икс» в первой степени и константа), то частное решение следует искать в виде $\tilde{y}=(Ax^2+Bx+C)e^{5x}$.
Если $f(x)=(1-x^2)e^{-2x}$ (в многочлене отсутствует «икс» в первой степени), то частное решение ищем в виде $\tilde{y}=x(Ax^2+Bx+C)e^{-2x}=(Ax^3+Bx^2+Cx)e^{-2x}$</td></tr>
<tr><td>9. $f(x)=\sin x$</td><td>$\tilde{y}=A\cos x+B\sin x$</td></tr>
<tr><td>10. $f(x)=-3\cos 2x$</td><td>$\tilde{y}=A\cos 2x+B\sin 2x$</td></tr>
<tr><td>11. $f(x)=2\cos 3x-4\sin 3x$</td><td>$\tilde{y}=A\cos 3x+B\sin 3x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Примечание: в подборе частного решения всегда должен присутствовать <u>и синус и косинус</u> (даже если в правую часть $f(x)$ входит только синус или только косинус).
Редко, но встречаются следующие похожие случаи:</td></tr>
<tr><td>12. $f(x)=-x\sin 5x$</td><td>$\tilde{y}=(Ax+B)\cos 5x+(Cx+D)\sin 5x$</td></tr>
<tr><td>13. $f(x)=(x-1)\cos\frac{x}{2}$</td><td>$\tilde{y}=(Ax+B)\cos\frac{x}{2}+(Cx+D)\sin\frac{x}{2}$</td></tr>
<tr><td>14. $f(x)=x\cos x+2\sin x$</td><td>$\tilde{y}=(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">И заключительные примеры, здесь тоже всё прозрачно:</td></tr>
<tr><td>15. $f(x)=2e^x\sin 2x$</td><td>$\tilde{y}=e^x(A\cos 2x+B\sin 2x)$</td></tr>
<tr><td>16. $f(x)=\frac{1}{3}e^{-3x}\sin x$</td><td>$\tilde{y}=e^{-3x}(A\cos x+B\sin x)$</td></tr>
<tr><td>17. $f(x)=e^{-2x}(5\sin 3x-\cos 3x)$</td><td>$\tilde{y}=e^{-2x}(A\cos 3x+B\sin 3x)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Примечание: в примерах 15-17 хоть и есть экспонента, но корни характеристического уравнения $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=1$ нас уже совершенно не волнуют – подбор частного решения идёт штатным образом без всяких домножений на «икс».</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">

II. Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня, один из которых равен нулю

Такой диффур имеет вид $y'' + py' = f(x)$.
Пример: рассмотрим подопытное неоднородное уравнение $y'' + 3y' = f(x)$.
Для соответствующего однородного уравнения $y'' + 3y' = 0$ составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 3\lambda = 0$ и найдем его корни: $\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 0$.

Получены различные действительные корни, один из которых равен нулю.
</td></tr>
<tr><td>Правая часть $f(x)$</td><td>В каком виде нужно искать частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Правило: если в правой части $f(x)$ находится ненулевая константа или многочлен, и один из корней характеристического уравнения равен нулю, то «очевидный» подбор частного решения необходимо домножить на «икс»:</td></tr>
<tr><td>18. $f(x) = -10$</td><td>$\tilde{y} = x \cdot A$, то есть частное решение ищем в виде $\tilde{y} = Ax$</td></tr>
<tr><td>19. $f(x) = -2x$</td><td>$\tilde{y} = x \cdot (Ax + B)$, т. е. частное решение ищем в виде $\tilde{y} = Ax^2 + Bx$</td></tr>
<tr><td>20. $f(x) = x^2 + 3$</td><td>$\tilde{y} = x \cdot (Ax^2 + Bx + C)$ или $\tilde{y} = (Ax^3 + Bx^2 + Cx)$</td></tr>
<tr><td>21. $f(x) = x^3$</td><td>$\tilde{y} = x \cdot (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$ или $\tilde{y} = (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Если в правую часть входит экспонента или экспонента, умноженная на многочлен, то подбор частного решения следует проводить по тем же принципам, по которым он проведён в примерах № 5-8.
На всякий случай еще пара примеров:</td></tr>
<tr><td>22. $f(x) = (x^2 + 2x)e^{3x}$</td><td>Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{\boxed{3}x}$ <u>не совпадает</u> с корнем характеристического уравнения $\lambda_1 = -3$
$\tilde{y} = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}$</td></tr>
<tr><td>23. $f(x) = (1 - x)e^{-3x}$</td><td>Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{\boxed{-3}x}$ совпал с корнем характеристического уравнения $\lambda_1 = -3$. Поэтому «обычный» подбор $\tilde{y} = (Ax + B)e^{-3x}$ нужно домножить на «икс»:
$\tilde{y} = x(Ax + B)e^{-3x}$, то есть искать частное решение в виде:
$\tilde{y} = (Ax^2 + Bx)e^{-3x}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Если правая часть $f(x)$ имеет вид из примеров № 9-17, то подбор осуществляется точно так же, как уже разобрано – в штатном режиме см. Раздел I.</td></tr>
</table>

Дополнительный пример:

рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка: $y''' - y'' = f(x)$. Для соответствующего однородного уравнения $y''' - y'' = 0$ составим характеристическое уравнение $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$ и найдем его корни: $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 1$.
Если получено **два кратных нулевых корня и в правой части $f(x)$ находится многочлен** (аналогично примерам № 18-21), то «штатный» подбор нужно домножать уже на x^2.
Например, если $f(x) = 3x$, то частное решение следует искать в виде:
$\tilde{y} = x^2 \cdot (Ax + B) = (Ax^3 + Bx^2)$

III. Характеристическое уравнение имеет два кратных действительных корня

Если эти корни равны нулю $\lambda_{1,2}=0$, то речь идёт об уравнении $y''=f(x)$, которое проще решить двукратным интегрированием правой части.

Если же корни ненулевые, то выполняем подбор.

Пример: Рассмотрим неоднородное уравнение $y''-4y'+4y=f(x)$.
Для соответствующего однородного уравнения $y''-4y'+4y=0$ составим характеристическое уравнение $\lambda^2-4\lambda+4=0$ и найдем его корни: $\lambda_{1,2}=2$.

Получены кратные (совпавшие) действительные корни.

Правая часть $f(x)$	**В каком виде нужно искать частное решение** $\tilde{y}$ **неоднородного уравнения?**
$f(x)$ – ненулевая константа или многочлен	Если $\lambda_{1,2}\neq 0$, то подбор частного решения следует осуществлять «штатным» способом точно так же, как в примерах № 1-4; если $\lambda_{1,2}=0$, то «очевидный» подбор следует домножить на x^2 либо дважды проинтегрировать правую часть.
24. $f(x)=5e^x$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{\boxed{1}x}$ <u>не совпадает</u> с кратным корнем характеристического уравнения $\lambda_{1,2}=2$ $\tilde{y}=Ae^x$
25. $f(x)=-2e^{2x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{\boxed{2}x}$ **совпал** с кратным корнем характеристического уравнения $\lambda_{1,2}=2$. Поэтому очевидный подбор $\tilde{y}=Ae^{2x}$ следует домножить на x^2: $\tilde{y}=x^2\cdot Ae^{2x}$ и искать частное решение в виде: $\tilde{y}=Ax^2e^{2x}$
26. $f(x)=(5x-1)e^{2x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{\boxed{2}x}$ **совпал** с кратным корнем характеристического уравнения $\lambda_{1,2}=2$. Поэтому «штатный» подбор $\tilde{y}=(Ax+B)e^{2x}$ следует домножить на x^2: $\tilde{y}=x^2\cdot(Ax+B)e^{2x}$, то есть искать частное решение в виде: $\tilde{y}=(Ax^3+Bx^2)e^{2x}$
Если правая часть $f(x)$ имеет вид из примеров № 9-17, то подбор осуществляется обычным образом – см. Раздел I.	

IV. Характеристическое уравнение имеет сопряженные комплексные корни: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, причём $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$

Пример: рассмотрим неоднородное уравнение $y'' + 6y' + 10y = f(x)$.
Для соответствующего однородного уравнения $y'' + 6y' + 10y = 0$ составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$ и найдем его корни: $\lambda_{1,2} = -3 \pm i$.
Получены сопряженные комплексные корни с ненулевой действительной частью α.

Правая часть $f(x)$	**В каком виде нужно искать частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения?**
Подбор частного решения осуществляется очевидным образом в случаях № 1-14, нюансы есть для следующих правых частей:	
27. $f(x) = 2e^{-3x}\sin 2x$	Проще всего объяснить так, берём правую часть и составляем сопряженные комплексные числа: $2e^{-3x}\sin 2x$ $-3 \pm 2i$ Полученные сопряженные комплексные числа $-3 \pm 2i$ <u>не совпадают</u> с корнями характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = -3 \pm i$, поэтому частное решение следует искать в обычном виде: $\tilde{y} = e^{-3x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$
28. $f(x) = 2e^{-3x}\cos x$	Составляем сопряженные комплексные числа: $2e^{-3x}\cos(1 \cdot x)$ $-3 \pm 1 \cdot i$ Составленные сопряженные комплексные числа $-3 \pm i$ **совпали** с корнями характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = -3 \pm i$, поэтому «обычный» подбор частного решения следует домножить на «икс»: $\tilde{y} = x \cdot e^{-3x}(A\cos x + B\sin x)$, получаем: $\tilde{y} = e^{-3x}(Ax\cos x + Bx\sin x)$
29. $f(x) = e^{x}(5\cos x - 3\sin x)$	$e^{1x}(5\cos(1 \cdot x) - 3\sin(1 \cdot x))$ $1 \pm 1 \cdot i$ Составленные сопряженные комплексные числа $1 \pm i$ <u>не совпадают</u> с корнями характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = -3 \pm i$, поэтому частное решение ищем в виде: $\tilde{y} = e^{x}(A\cos x + B\sin x)$
30. $f(x) = e^{-3x}(-\cos x + 2\sin x)$	$e^{-3x}(-\cos(1 \cdot x) + 2\sin(1 \cdot x))$ $-3 \pm 1 \cdot i$ Составленные сопряженные комплексные числа $-3 \pm i$ **совпали** с корнями $\lambda_{1,2} = -3 \pm i$, поэтому: $\tilde{y} = x \cdot e^{-3x}(A\cos x + B\sin x) = e^{-3x}(Ax\cos x + Bx\sin x)$

V. Характеристическое уравнение имеет комплексные, чисто мнимые корни: $\lambda_{1,2} = \pm\beta i$

В таком диффуре отсутствует первая производная: $y'' + qy = f(x)$.

Пример: рассмотрим неоднородное уравнение $y'' + 4y = f(x)$.
Для соответствующего однородного уравнения $y'' + 4y = 0$ составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4 = 0$ и найдем его корни: $\lambda_{1,2} = \pm 2i$.

Получены чисто мнимые сопряженные комплексные корни.

Правая часть $f(x)$	**В каком виде нужно искать частное решение** $\tilde{y}$ **неоднородного уравнения?**
Подбор частного решения осуществляется очевидным образом в случаях № 1-8, 15-17, нюансы есть для следующих правых частей:	
31. $f(x) = \sin x$	Коэффициент $\sin(\boxed{1}\cdot x)$ не совпадает с коэффициентом при характеристических сопряженных комплексных корнях $\pm\boxed{2}i$, поэтому частное решение ищем в обычном виде: $\tilde{y} = A\cos x + B\sin x$
32. $f(x) = -3\sin 2x$	Коэффициент $-3\sin\boxed{2}x$ **совпал** с коэффициентом при характеристических сопряженных комплексных корнях $\pm\boxed{2}i$, поэтому при подборе «штатное» частное решение необходимо домножить на «икс»: $\tilde{y} = x\cdot(A\cos 2x + B\sin 2x)$, то есть искать его в виде: $\tilde{y} = Ax\cos 2x + Bx\sin 2x$
33. $f(x) = 2\cos 3x - 2\sin 3x$	Коэффициенты $2\cos\boxed{3}x - 2\sin\boxed{3}x$ не совпадают с коэффициентом при характеристических сопряженных комплексных корнях $\pm\boxed{2}i$, поэтому частное решение ищем в обычном виде: $\tilde{y} = A\cos 3x + B\sin 3x$
34. $f(x) = 2x\cos 2x - \sin 2x$	Коэффициенты $2x\cos\boxed{2}x - \sin\boxed{2}x$ **совпали** с коэффициентом при характеристических сопряженных комплексных корнях $\pm\boxed{2}i$, поэтому при подборе очевидное частное решение опять же домножаем на «икс»: $\tilde{y} = x\cdot((Ax+B)\cos 2x + (Cx+D)\sin 2x)$, или: $\tilde{y} = (Ax^2 + Bx)\cos 2x + (Cx^2 + Dx)\sin 2x$
35. $f(x) = -3x\cos 4x$	Коэффициент $-3x\cos\boxed{4}x$ не совпадает с коэффициентом при характеристических сопряженных комплексных корнях $\pm\boxed{2}i$, поэтому частное решение ищем в «штатном» виде: $\tilde{y} = (Ax+B)\cos 4x + (Cx+D)\sin 4x$

Краткие итоги по пяти разделам

Тип корней характеристического уравнения	**Когда следует проявить ПОВЫШЕННОЕ ВНИМАНИЕ при подборе частного решения**
I. Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня, отличных от нуля.	Если в правой части $f(x)$ находится экспонента или экспонента, умноженная на многочлен (примеры 5-8).
II. Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня, один из которых равен нулю.	Если в правой части $f(x)$ находится константа, многочлен, экспонента или экспонента, умноженная на многочлен (примеры 18-23).
III. Характеристическое уравнение имеет два кратных действительных корня.	Если в правой части $f(x)$ находится экспонента или экспонента, умноженная на многочлен (примеры 24-26).
IV. Характеристическое уравнение имеет сопряженные комплексные корни: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, причём $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$.	Если в уравнении есть правые части, разобранные в примерах 27-30: $f(x) = 2e^{-3x}\sin 2x$, $f(x) = 2e^{-3x}\cos x$, $f(x) = e^{x}(5\cos x - 3\sin x)$ и т. п.
V. Характеристическое уравнение имеет сопряженные, чисто мнимые комплексные корни: $\lambda_{1,2} = \pm\beta i$.	Когда в правой части находится синус, косинус или синус и косинус одновременно, либо данные функции, умноженные на многочлены (многочлен) (примеры 31-35).