

Правила интегрирования и таблица неопределенных интегралов

Обычно при нахождении интегралов сначала используются правила интегрирования, а затем – таблица интегралов.

Правила интегрирования:

- 1) $\int k u dx = k \int u dx$ – постоянный множитель можно вынести за знак интеграла;
- 2) $\int (u \pm v) dx = \int u dx \pm \int v dx$ – интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов от каждой функции в отдельности;
- 3) $\int u dv = uv - \int v du$ – правило интегрирования по частям.
- 4) Замена переменной. Во избежание путаницы, её расписывать не буду, читайте статью: http://mathprofi.ru/metod_zameny_peremennoi.html

Таблица неопределенных интегралов:

$\int 0 \cdot dx = C$, здесь и далее $C = const$
$\int dx = x + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$ Следует обратить внимание, что интеграл от степенной функции – это самая используемая вещь на практике. Многие (но не все!) корни, например, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x^5}$, $\frac{1}{\sqrt[7]{x^2}}$ и т. п., удобно представить в виде $x^{\frac{a}{b}}$ для применения формулы $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$. (как представить – см. Горячие формулы шк. курса математики: http://mathprofi.ru/goryachie_formuly.pdf).
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ (случай $n = -1$)
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$, в частности, $\int e^x dx = e^x + C$
Интегралы от тригонометрических функций: $\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\int \cos x dx = \sin x + C$ $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \text{ в частности } \int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x - a}{x + a} \right + C \quad \text{«высокий логарифм»}$ <i>Примечание:</i> часто данную формулу можно встретить немного в другом виде, например: $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a + x}{a - x} \right + C$, но первый вариант, на мой взгляд, удобнее.
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 + A} \right + C \quad (A \neq 0) \quad \text{«длинный логарифм»}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$
Интегралы от гиперболических функций: $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C \quad \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$

Важно! Иногда встречаются очень большие таблицы интегралов (порядка 100 штук). Эти таблицы рекомендую использовать только для самопроверки или в самом крайнем случае – по той причине, что интегралы от «других функций» на самом деле являются следствием правил и приёмов интегрирования. И, соответственно, данное «решение» может сильно не понравиться рецензенту. Типичный пример такого «табличного» интеграла: $\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C$

В действительности, для того, чтобы найти интеграл от логарифма, следует применить правило интегрирования по частям и подробно расписать ход решения.

А вот некоторые **неберущиеся неопределенные интегралы:**

$\int e^{-x^2} dx$ – интеграл Пуассона;
 $\int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx$ – интегралы Френеля;
 $\int \frac{dx}{\ln x}$ – интегральный логарифм;
 $\int \frac{e^x dx}{x}$ – интегральная экспонента;
 $\int \frac{\sin x dx}{x}$ – интегральный синус;
 $\int \frac{\cos x dx}{x}$ – интегральный косинус.

Иногда проскакивают. Встретятся – не мучайтесь, в ответе достаточно указать, что интеграл не берется. А если подобные интегралы появятся в ходе решения какого-либо примера, значит, Вы либо ошиблись, либо интеграл является неберущимся, либо, что вероятнее всего, в условии допущена опечатка.