

Таблица разложений некоторых функций в степенные ряды

$$e^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \dots + \frac{\alpha^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}$$

Область сходимости ряда: $-\infty < \alpha < +\infty$

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \cdot \alpha^{2n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \alpha^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Область сходимости ряда: $-\infty < \alpha < +\infty$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \alpha^{2n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n}}{(2n)!}$$

Область сходимости ряда: $-\infty < \alpha < +\infty$

$$\ln(1 + \alpha) = \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} - \frac{\alpha^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\alpha^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \alpha^n}{n}$$

Ряд сходится при $-1 < \alpha < 1$ или, то же самое, при $|\alpha| < 1$

Кроме того, в каждом конкретном случае нужно исследовать концы интервала сходимости – там ряд тоже может сходиться!

Биномиальное разложение:

$$(1 + \alpha)^k = 1 + \alpha \cdot k + \frac{k(k-1)}{2!} \cdot \alpha^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \cdot \alpha^3 + \dots + \frac{k(k-1)(k-2) \cdot \dots \cdot (k-n+1)}{n!} \cdot \alpha^n + \dots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k(k-1)(k-2) \cdot \dots \cdot (k-n+1)}{n!} \cdot \alpha^n$$

Ряд сходится при $-1 < \alpha < 1$ ($|\alpha| < 1$).

Как и в предыдущем пункте – концы интервала подлежат исследованию!

Распространенные частные случаи биномиального разложения:

$$\sqrt{1 + \alpha} = 1 + \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \alpha^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \alpha^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \alpha^4 + \dots$$

$$\sqrt{1 - \alpha} = 1 - \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \alpha^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \alpha^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \alpha^4 - \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \alpha}} = 1 - \frac{1}{2} \alpha + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \alpha^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \alpha^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \alpha^4 - \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \alpha}} = 1 + \frac{1}{2} \alpha + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \alpha^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \alpha^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \alpha^4 + \dots$$

$$\frac{1}{1 + \alpha} = 1 - \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \alpha^4 - \alpha^5 + \dots$$

$$\frac{1}{1 - \alpha} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \dots$$

$$\operatorname{arctg} \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5} - \frac{\alpha^7}{7} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{\alpha^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n+1}}{2n+1}$$

Область сходимости ряда: $-1 \leq \alpha \leq 1$ или, то же самое: $|\alpha| \leq 1$

$$\arcsin \alpha = \alpha + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\alpha^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\alpha^7}{7} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{\alpha^9}{9} + \dots + \frac{(2n-1)!! \alpha^{2n+1}}{(2n)!! (2n+1)} + \dots$$

Область сходимости ряда: $-1 \leq \alpha \leq 1$ или, то же самое: $|\alpha| \leq 1$

Поскольку речь идёт о степенных рядах, то **разложения справедливы не только для значения $\alpha = x$** , но и для других степенных членов, таких как $\alpha = -x$, $\alpha = 2x$, $\alpha = x^2$, $\alpha = -5x^3$, $\alpha = 3\sqrt{x}$, $\alpha = \sqrt[3]{x}$, $\alpha = 3x^4$ и т. п.

При этом в общем случае фактическая область сходимости **будет другой!** Так, например, при $\alpha = \frac{x}{2}$ разложение функции $f(x) = \arcsin \frac{x}{2}$ сходится к ней на промежутке:

$$-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

Более того, табличный «шаблон» может быть «урезан», типичные примеры:

1) если $\alpha = \sqrt{x}$, то функция $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ определена только для неотрицательных значений аргумента, и поэтому область сходимости соответствующего ряда: $0 \leq x < +\infty$;

2) аналогично, если $\alpha = \sqrt[4]{x}$, то разложение функции $f(x) = \ln(1 + \sqrt[4]{x})$ сойдётся к ней лишь в области $0 \leq x \leq 1$.

С дополнительной информацией и практическими задачами по теме можно ознакомиться на уроке http://mathprofi.ru/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady.html