Горячие тригонометрические формулы

В данный обзор я включу ходовые тригонометрические формулы, которые наиболее часто используются в ходе решения задач по высшей математике.

Знать обязательно или держать под рукой необходимо:

Основное тригонометрическое тождество:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

и некоторые вещи, которые из него следуют:

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = (1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)$

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = (1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)$

Простейшие манипуляции с тангенсом и котангенсом – чтобы от них избавиться или, наоборот – «собрать» из синуса и косинуса:

$tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Формулы двойного угла:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

Есть еще тангенс двойного угла, но я не припомню, чтобы в практических заданиях он где-то требовался, экзотика, одним словом.

! Очень важные следствия из данных формул:

$1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$

$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$

или, то же самое, в другом виде:

$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

Запомните их, или держите под рукой, натыкаться в вышке на данные формулы будете на каждом шагу!

Данные преобразования часто выполняются при вычислении пределов, производных, интегралов

Пожалуйста, обратите также внимание, на тот факт, что параметр α может быть не только буковкой x, но и сложной функцией, например:

$\sin^2(x^2+4x-10) + \cos^2(x^2+4x-10) = 1$

$\sin 3x = \sin\left(2\cdot\dfrac{3x}{2}\right) = 2\sin\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{3x}{2}$

$tg(\ln x + 3) = \dfrac{\sin(\ln x + 3)}{\cos(\ln x + 3)}$

А теперь рассмотрим формулы, которые используются реже:

Полезно знать о взаимосвязи тангенса и котангенса:

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1,\ tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha},\ ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$$

а то, *иногда*, хитрый преподаватель подсунет что-нибудь вроде $\frac{1}{ctg\alpha}$, и потом сидишь, не знаешь, что с этим делать.

Упомянем также экзотический секанс и косеканс:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha},\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$ …и всего-то лишь…

Студентов-заочников, обычно секансами не пугают, а у очников, нет-нет, да и проскакивает.

Иногда (обычно в интегралах), приходится использовать формулы:

$$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha},\ ctg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

И на самом деле – это не самостоятельные формулы, а следствия основного тригонометрического тождества

Ну и еще куча похожих друг на друга формул:

Сразу скажу, что у данной группы формул есть одно замечательное свойство – упорно не запоминаться. Я сотни раз искал их в справочнике, так и не запомнилась ни одна.

Раз:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Два:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

Три:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Есть еще аналогичные формулы для тангенсов и котангенсов, но о них не будем, в 99,9% случаях – не встретите.

Что-нибудь из перечисленных формул «Раз, Два, Три» иногда требуется применить для преобразований в пределах и подынтегральных выражениях.

ИНОГДА требуются.

Но требуются.

О гиперболических синусах, косинусах умолчим… По-крайне мере, пока. Ими запугивают еще реже, чем секансами, да и то, только зазнавшихся отличников ☺

Еще раз подчеркиваю, что во ВСЕХ тригонометрических формулах параметры α и β могут быть не только буковками x и y, но и сложными выражениями, функциями.

Успехов!